

Bremen 1976

Mathematik — Arbeitspapiere Nr. 3

Günter Matthiessen

Theorie der heterogenen Algebren

1976

UNIVERSITÄT BREMEN



Die vorliegende Reihe 'Universität Bremen, Mathematik-Arbeitspapiere' gliedert sich in drei Teile:

- A: Mathematische Forschungspapiere
- B: Hochschuldidaktisches Material
- C: Papiere für Mathematik im interdisziplinären Zusammenhang.

Jede der drei Unterreihen kann einzeln bezogen werden. Daneben ist es selbstverständlich auch möglich, einzelne Hefte zu beziehen.

Die chronologische Reihenfolge, in der die Hefte der gesamten Reihe veröffentlicht werden, bestimmt die fortlaufende Numerierung der Publikationen. Die Gliederung in Unterreihen bleibt dabei unberücksichtigt.

Ziel der Veröffentlichungen, die vom Studienbereich 4 (Mathematik) der Universität Bremen herausgegeben werden, ist es, die Texte unverzüglich der wissenschaftlichen Diskussion zugänglich zu machen. Deshalb sind nur die jeweiligen Autoren für den Inhalt verantwortlich.

Herstellung und Vertrieb Universität Bremen
1. Auflage 1976

© Günter Matthiessen, Bremen 1976

Bezugsadresse: Universität Bremen
 Presse- und Informationsamt
 2800 Bremen 33
 Postfach
 Vertriebsnr.: C 003

**Mathematik-Arbeitspapiere Nr. 3
Universität Bremen Teil A
Mathematische Forschungspapiere**

Günter Matthiessen

Theorie der heterogenen Algebren

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

Diese Arbeit hat dem Promotionsausschuß Dr.rer.nat. der Universität Bremen als Dissertation vorgelegen. An dem Promotionsverfahren haben Professor Dr. J. Timm und Professor Dr. H. Herrlich als Gutachter mitgewirkt. Das Kolloquium fand am 22.7.1976 statt.

Bremen, Dezember 1976



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
§ 1 Theorie der heterogenen Mengen und Algebren .	1
§ 2 Homogenisierung	12
§ 3 Kategorien von Ω -Algebren	24
§ 4 Syntaktische und semantische Beschreibung von Klassen von Ω -Algebren	40
Anhang A : Reguläre und (stark) finitäre Funktoren .	60
Anhang B : Operatoren auf $K(\Omega)$	73
Literaturliste	80
Index	82



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543102_0020

Einleitung

Der Gegenstand der Algebra hat sich im Laufe des 19. Jh. von der Beschäftigung der Lösbarkeit von Gleichungen verlagert zur Untersuchung von verschiedenen Objekten mit Verknüpfungen. Es entstanden somit - als Hilfsmittel zur Untersuchung von Gleichungen, der Geometrie und der Zahlentheorie - die Gruppentheorie, Ringtheorie, Körpertheorie und in ersten Ansätzen Theorie der Booleschen Algebra und Verbandstheorie. Eine gewisse Ähnlichkeit der Theorien führte in den 30-er Jahren und verstärkt in den 50-er Jahren dazu, die vorhandenen Gemeinsamkeiten der verschiedenen algebraischen Theorien in einer übergeordneten Theorie zu formulieren, so daß zum einen die bekannten Analogien auf "Metasätze" zurückgeführt werden können, zum anderen aber konnten auch neu entwickelte Methoden der allgemeinen Algebra, wie z. B. Modelltheorie, in den speziellen Theorien direkt angewandt werden.

Schon 1963 wird von Higgins (H63) *) erkannt, daß es eine ganze Reihe von "algebraähnlichen" Theorien gibt, die sich nicht dem Konzept der allgemeinen Algebra unterordnen, im wesentlichen aber genau dieselben Methoden benutzen und dieselben Resultate bekommen. Es handelt sich um Objekte, bei denen jeweils eine Familie von Grundmengen existiert und Verknüpfungen zwischen Produkten von verschiedenen dieser Grundmengen. Birkhoff/Lipson nennen diese Objekte "heterogeneous algebras", einen Terminus, den ich dann auch übernommen habe - die üblichen Algebren werden zum Unterschied dazu auch als "homogene Algebren" bezeichnet.

Es gibt eine Reihe von mathematischen Theorien, die sich sinnvoll als Theorien spezieller heterogener Algebren darstellen lassen. In erster Linie die verschiedensten Klassen von deterministischen Automaten, weiterhin die Klasse aller Moduln (mit variablem Ring), die in C65 eingeführten "Clones" (= **c**losed set of operators). So gibt W. Taylor in T73 eine

*) Literaturangaben sind jeweils durch ein oder zwei Großbuchstaben als Initialen des/der Autors(en) und zwei Ziffern, die das Erscheinungsjahr angeben, gekennzeichnet.

Charakterisierung von Mal'cev-Bedingungen mit Hilfe von heterogenen Clones, und macht auch plausibel, daß die anderen Modellierungen von Clones immer eine gewisse Unhandlichkeit aufweisen.

Weiterhin kann man auch "algebraische Strukturen" (im Sinne von M73, d.h. es gibt eine Grundmenge und Operationen sowie Relationen) als heterogene Algebren betrachten, indem man die "Logik" als weiteres Phylum und die n -stelligen Relationen als n -stellige Operationen mit Werten in der Logik auffaßt. Hieraus ergeben sich sofort Möglichkeiten mehrwertige Logiken heranzuziehen. Der Nachteil dieses Ansatzes ist es, daß die Logik für alle Modelle fest vorgegeben ist, so daß etwa Produkte von Strukturen nicht Produkte von heterogenen Algebren sind.

Eine ähnliche Situation liegt vor, wenn man z. B. Automaten mit jeweils fest vorgegebenem Ein- und Ausgabealphabet betrachtet, oder bei metrischen Räumen, normierten Vektorräumen u. a. Die Schwierigkeit bei der Behandlung solcher Probleme liegt darin, daß man keine analogen Methoden der homogenen Algebra zur Verfügung hat. So bestand das Hauptgewicht meiner Forschungen während des Promotions-Stipendiums darin, diese spezifisch heterogenen Probleme aufzuarbeiten und dafür eine geschlossene Theorie zu entwickeln. Die Ergebnisse dieser Bemühungen sollen demnächst veröffentlicht werden.

Um einen systematischen Aufbau der Theorie der heterogenen Algebra hat man sich bisher nicht gekümmert, da die wenigen vorhandenen Arbeiten die Vermutung nahelegten, daß in der heterogenen Algebra ohnehin alles wie in der homogenen Algebra geht. Der Inhalt dieser Arbeit sollte daher ursprünglich eine kurzgefaßte Grundlegung der Theoreme und Methoden sein, die für den Hauptteil, die Behandlung der Klassen von heterogenen Algebren mit einigen fixierten Phyla, benötigt werden. Bei der Definition der Begriffe "Gleichungsklasse" und "Quasigleichungsklasse" und der semantischen Charakterisierung dieser Begriffe stellte sich folgendes Dilemma ein :

Entweder sind Gleichungsklassen im allgemeinen keine
axiomatischen Klassen,
oder der Satz von Birkhoff (der in H63 bewiesen wurde)
ist falsch

oder axiomatische Klassen sind nicht abgeschlossen gegen Ultraprodukte.

Eine Analyse dieses Dilemmas ergab, daß die Ursache im wesentlichen darin liegt, daß bei der modelltheoretischen Beschreibung von Klassen von Ω -Algebren die Gültigkeit einer Formel auch von Variablen abhängen kann, die gar nicht in der Formel vorkommen. Der Grund ist der, daß die Variablenmenge so groß sein kann, daß eine Belegung der Variablen in dem Modell nicht mehr möglich ist; das ist der Fall, wenn ein Phylum der Variablenmenge nicht leer ist, aber das entsprechende Phylum des Modells leer ist. Dann kann eine Formel allein wegen der Struktur der Variablenmenge - ohne Rücksicht auf den Inhalt der Formel selber - schon allgemeingültig sein in einem Modell. - Als Ausweg des Dilemmas wurde eine Unterscheidung getroffen zwischen beliebigen universell axiomatischen Klassen und zwischen "finitären" Klassen, die durch Formelmengen beschreibbar sind, die jeweils nur endliche Variablenmengen besitzen. Somit bekommt man jeweils zwei unterschiedliche Begriffe von "Quasigleichungsklassen" und "Gleichungsklassen", für die es dann entsprechend unterschiedliche semantische Charakterisierungen gibt.

In § 1 wird die Theorie der heterogenen Algebra eingeführt. Die Darstellung unterscheidet sich - abgesehen von der Ausführlichkeit - von bisherigen Darstellungen durch eine andere Definition der "Stellenzahl" der Operationen. Üblicherweise nimmt man Elemente des freien Monoids über der Menge der Phylumsymbole als Stellenzahlen. Diese Darstellung ist aber für eine allgemeine Behandlung der Theorie der heterogenen Algebren meines Erachtens unpraktisch, da das freie Monoid eine Größe ist, die in der Kategorie der heterogenen Mengen nicht in natürlicher Weise vorkommt, so daß zusätzliche Konstruktionen notwendig sind. Ich benutze dagegen als zulässige Stellenzahlen die "endlichen" heterogenen Mengen bzw - als Skelett davon - die endlichen heterogenen Kardinalzahlen. Das Analogon zum Produkt A^n wird dann durch den Hom-Funktor gegeben: für heterogene Mengen A und B ist $A^B := \text{hom}_{\text{Ens}}(B, A)$. Durch diese Darstellung sind kategorielle Untersuchungsmethoden in den Paragraphen 3 und 4 sehr viel einfacher zu handhaben.

Im § 2 wird eine Methode entwickelt, wie man gewisse Aussagen über heterogene Algebren als Aussagen über homogene Algebren "simulieren" kann. Für eine ganze Reihe von bekannten Sachverhalten der homogenen Algebra hat man damit die Möglichkeit, diese Sätze auf heterogene Algebren zu übertragen. Die ursprüngliche Annahme, daß man mit Hilfe dieser "Homogenisierung" alle "wesentlichen Theoreme" der heterogenen Algebra rein formal nachvollziehen kann, erwies sich dann doch als zu hoch gesteckt, da z. B. Produkte nicht mit der Homogenisierung vertauschbar sind. Für die verbandstheoretischen Aussagen über subalgebraische Mengen und Kongruenzen ist die Homogenisierung allerdings ziemlich leistungsfähig.

Im § 3 werden dann wesentliche Eigenschaften von Kategorien von Ω -Algebren nachgewiesen: der Vergißfunktorkomplekt $U : \underline{K}(\Omega) \longrightarrow \underline{Ens}^H$ ist regulär, stark finitär, d. h. er erhält gerichtete Limiten, und monadisch. Außerdem ist jeder Funktor, der diese Eigenschaften hat, äquivalent zu einer finitären Gleichungsklasse von Ω -Algebren.

Im letzten Paragraphen schließlich werden die syntaktisch definierten Begriffe "Quasigleichungsklasse" und "Gleichungsklasse" semantisch charakterisiert. Als wesentlich erweist sich das Verhalten von Formeln unter gerichteten Limiten. Universell axiomatische Klassen sind im allgemeinen nicht abgeschlossen gegen gerichtete Limiten, sondern nur finitäre Klassen. - Im § 4 werden auch Ultraprodukte benutzt, die dort kategoriell als gerichtete Limiten von Produkten definiert werden. Es zeigt sich allerdings, daß im Falle der heterogenen Mengen diese Definition im allgemeinen nicht übereinstimmt mit der üblichen Definition als spezieller Quotient eines Produktes. Im übrigen sind die beiden Konstruktionen in der Kategorie der Mengen nur dann äquivalent, wenn man die leere Menge als Objekt ausschließt; dann sind nämlich alle Projektionen der Teilprodukte Retraktionen, also surjektive Abbildungen. Entsprechend sind universell axiomatische Klassen abgeschlossen gegen Ultraprodukte von Familien, in denen für jedes Phylumsymbol entweder alle entsprechenden Phyla leer sind oder alle Phyla nicht leer sind.

Im Anhang A werden stark finitäre, reguläre Funktoren untersucht. Es wird ein Kriterium angegeben, wie man die Eigenschaft "algebroidal" von der Zielkategorie liften kann. Als Resultat erhalten wir, daß die Kategorie aller Ω -Algebren algebroidal ist, was im § 4 eine gewisse Rolle spielt. Außerdem enthält der Anhang A eine Charakterisierung der finitären Objekte als der "finitär präsentierten Objekte". Da im Anhang A die wichtigsten kategorientheoretischen Begriffe wie "finitär", "algebroidal", "regulär" erläutert werden, sollte dieser Anhang vor dem § 3 gelesen werden. Der Anhang ist ohne Spezialisierung auf die Anwendungen in §§ 3 f formuliert und die Ergebnisse gelten somit unmittelbar auch für andere Kategorien.

Im Anhang B wird ein Theorem, das gewisse Zusammenhänge zwischen verschiedenen Konstruktionen auf der Klasse aller Ω -Algebren beschreibt, bewiesen. Der Beweis ist nur deswegen ausgelagert, da er relativ lang ist.

Für die Anregungen und Hinweise im Zusammenhang mit dieser Arbeit möchte ich den Professoren Dr. J. Timm und Dr. H. Herrlich danken, wie ich auch meiner Frau Anita danken möchte, die mich bei meiner Arbeit moralisch unterstützt hat und einen großen Teil der Arbeit und der noch umfangreicheren vorläufigen Versionen mit der Maschine geschrieben hat.

§ 1 Theorie der heterogenen Mengen und Algebren

In diesem Paragraphen werden die Grundbegriffe der Theorie der heterogenen Algebren und - als Grundlage hierzu - der heterogenen Mengen - eingeführt. Im wesentlichen werden die Begriffe von C65 für den Fall verallgemeinert, daß das einer Algebra zugrunde liegende Objekt nicht eine Menge ist, sondern eine Folge von Mengen. Der Begriff der heterogenen Algebra ist - z. T. unterschiedlich - definiert in H63, BL70, M72 und T73. Die Darstellung in diesem Paragraphen ist nicht originell, außer in der Definition der "Stellenzahlen" und damit verbunden der Mengen A^X .

1.01 In dieser Arbeit sei im folgenden immer H eine nicht-leere Menge, die Menge der Phylumsymbole. *)

1.02 Ein H-tupel A ist eine Abbildung

$$A : \begin{cases} H \longrightarrow \text{Ens} \\ h \longmapsto A^h \end{cases},$$

wobei Ens hier und im folgenden die Klasse aller Mengen sei. Falls für alle $h \in H$ A^h Mengen im naiven Sinne sind, wird ein H -tupel als H-Menge bezeichnet.

1.03 Die Operationen der Mengentheorie : $\prod, \sqcup, \times, \sqcup, \cup, \cap, \cup, \cap, \setminus$ **) und die Relationen $\subseteq, \supseteq$ werden für H -

*) Der Begriff "Phylum" ist in BL70 eingeführt worden.

**) Wir gehen davon aus, daß die "großen Operationen" $\prod, \sqcup, \cup, \cap$ auf Familien von Mengen operieren, also etwa

$\cup \langle A_i \mid i \in I \rangle$ bzw. $\sqcup A_i$, wenn die Indexmenge klar ist. $\sqcup$ bezeichne das Coprodukt von Mengen; d.h. für eine Familie von H -Mengen $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ ist $\sqcup \langle A_i \mid i \in I \rangle$ ein Coproduktobjekt mit Injektionen $\langle \mu_i : A_i \longrightarrow \sqcup A_i \rangle$. Wir schreiben aber allgemein für $x \in \sqcup A_i$ " $x \in A_j$ " statt " $\exists \bar{x} \in A_j, \mu_j(\bar{x}) = x$ ". Entsprechend setzen wir für $k \in I$ " $A_k \subseteq \sqcup A_i$ ". Man beachte, daß eine Interpretation dieser Schreibweisen als Formeln der Mengenlehre zu Paradoxien führt, wie etwa folgende: Es ist $A \subseteq A \sqcup B$ und $B \subseteq A \sqcup B$ und $A \cap B = \emptyset$; also wären beliebige Paare von Mengen disjunkt.

tupel komponentenweise definiert.

1.04 Sei A eine Menge. Durch A^H bezeichnen wir die H -Menge $\langle A \mid h \in H \rangle$, die also in allen Phyla identisch A ist. Insbesondere ist $\emptyset^H$ die leere H -Menge.

1.05 Seien $A, B \in \text{Ens}^H$ und sei R ein H -tupel, so daß für alle $h \in H$ $R^h \subseteq A^h \times B^h$, dann heißt R eine H -Korrespondenz - in Zeichen $R \in \text{Korr}(A, B)$. Falls $R \in \text{Korr}(A, B)$ und $S \in \text{Korr}(B, C)$, dann ist $R * S \in \text{Korr}(A, C)$ folgende Korrespondenz:
 $(R * S)^h = \{ \langle x, z \rangle \in A^h \times C^h \mid \exists y \in B^h \langle x, y \rangle \in R^h \text{ und } \langle y, z \rangle \in S^h \}$.
 Für $R \in \text{Korr}(A, B)$ ist durch $\bar{R}^h := \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R^h \}$ eine H -Korrespondenz $\bar{R} \in \text{Korr}(B, A)$ definiert.

Statt $\langle x, y \rangle \in R$ schreiben wir häufig $x \equiv y (R)$.

1.06 Seien $A, B \in \text{Ens}^H$ und $f \in \text{Korr}(A, B)$. f heißt H -Abbildung - in Zeichen $f \in \text{Abb}(A, B)$, $f : A \longrightarrow B$ oder $A \xrightarrow{f} B$ - falls für alle $h \in H$ $f^h : A^h \longrightarrow B^h$ eine Abbildung ist. Für H -Abbildungen $f \in \text{Abb}(A, B)$ und $g \in \text{Abb}(B, C)$ schreiben wir $g \circ f$ stat $f * g$. Falls für alle $h \in H$ f^h bijektiv ist, ist $f * \bar{f} = 1_A$ und $\bar{f} * f = 1_B$ und wir schreiben daher f^{-1} für $\bar{f}$; durch 1_A wird diejenige H -Korrespondenz in $\text{Korr}(A, A)$ bezeichnet, für die für $h \in H$ $1_A^h = 1_{A^h}$.
 Sei $A \in \text{Ens}^H$ und $\Phi \in \text{Korr}(A, A)$. Φ heißt H -Äquivalenz - in Zeichen $\Phi \in \text{Equ}(A)$ - wenn für alle $h \in H$ Φ^h eine Äquivalenzrelation auf A^h ist.

Man verifiziert leicht, daß

$$\text{Abb}(A, B) = \{ f \in \text{Korr}(A, B) \mid 1_A \subseteq f * \bar{f} \wedge \bar{f} * f \subseteq 1_B \} \quad \text{und}$$

$$\text{Equ}(A) = \{ \Phi \in \text{Korr}(A, A) \mid 1_A \subseteq \Phi \wedge \bar{\Phi} \subseteq \Phi \quad \Phi * \bar{\Phi} \subseteq \Phi \}.$$

Für $f \in \text{Abb}(A, B)$ ist also $f * \bar{f} \in \text{Equ}(A)$; wir nennen $\ker f := f * \bar{f}$ den Kern von f .

1.07 Die Klasse Ens^H bildet zusammen mit den Mengen $\text{Abb}(A, B)$ und der Verknüpfung $\circ$ eine Kategorie Ens^H , die isomorph zur Funktorkategorie Ens^H ist, wenn H die diskrete Kategorie mit H als Objektklasse bezeichnet. Man kann also die Limiten und Colimiten in Ens komponentenweise bilden (vgl. HS73, Thm. 25.6). Außerdem ist Ens^H isomorph zur Kommakategorie $(\text{Ens} \downarrow H)$.

1.08 Sei $A \in \text{Ens}^H$. Die Potenzmenge (es ist keine H-Menge!)

$\mathcal{P}A$ ist durch $\mathcal{P}A := \{B \mid B \leq A\}$ definiert.

Die in 1.05 eingeführte Operation $*$ wird erweitert:

Für $X \in \mathcal{P}A$, $Y \in \mathcal{P}B$ und $R \in \text{Korr}(A, B)$ ist $X * Y \in \mathcal{P}B$ durch

$(X * R)^h = \{y \in B^h \mid \exists x \in A^h \langle x, y \rangle \in R^h\}$ definiert und

$R * Y := Y * \bar{R} \in \mathcal{P}A$. Falls $f \in \text{Abb}(A, B)$, schreiben wir $f(X)$ statt $X * f$ und $f^{-1}(Y)$ statt $f * Y$.

1.09 Die Zuordnung $A \longmapsto A^H$, die in 1.04 eingeführt wurde,

ist ein Funktor $(\bullet)^H : \underline{\text{Ens}} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ und hat einen

links-adjungierten $(\bullet)^O : \underline{\text{Ens}}^H \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$, der auf den Objekten

und Morphismen durch $A^O := \bigsqcup \langle A^h \mid h \in H \rangle$ definiert ist.

Man kann den Funktor $(\bullet)^O$ auf natürliche Weise erhalten,

wenn man $\underline{\text{Ens}}^H$ als Kommakategorie $(\underline{\text{Ens}} \downarrow H)$ auffaßt:

Objekte sind Paare (A, φ) , wobei $\varphi : A \longrightarrow H$ eine Mengenabbildung ist; $f : (A, \varphi) \longrightarrow (B, \psi)$ ist ein Morphismus,

wenn

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & H & \end{array}$$

kommutiert.

" φ ordnet jedem Element sein Phylum zu". Der Funktor $(\bullet)^O$

"vergißt" also, welches Phylum jedem Element zugeordnet ist.

1.10 Mit Hilfe des Funktors $(\bullet)^O$ beweisen wir folgendes

Lemma Sei $A \in \text{Ens}^H$ und für $B \in \mathcal{P}A$ sei $B^O := A \setminus B$.

$\langle \mathcal{P}A; \cup, \cap, ^c, \emptyset^H, A \rangle$ ist eine Boolsche Algebra, die zur

Boolschen Algebra $\langle \mathcal{P}A^O; \cup, \cap, ^c, \emptyset, A^O \rangle$ isomorph ist.

Beweis: Der Isomorphismus ist $B \longmapsto B^O$://

$\mathcal{P}A$ ist also sogar eine vollständige Boolsche Algebra, da

$\mathcal{P}A^O$ vollständig ist.

1.11 In der Kategorie $\underline{\text{Ens}}$ spielen - im Zusammenhang mit algebraischen Theorien - Endlichkeits- und Trivialitätsbedingungen eine gewisse Rolle. Für H-Mengen benötigen wir

folgende Bedingungen:

1. A ist injektiv, falls für alle $h \in H$ $A^h \neq \emptyset$
2. A ist fast trivial, falls für alle $h \in H$ $\text{card } A^h \leq 1$
3. A ist endlich (unendlich, abzählbar), falls A^0 endlich (unendlich, abzählbar) ist.
4. A ist H-endlich (H-unendlich, H-abzählbar), falls für alle $h \in H$ A^h endlich (unendlich, abzählbar) ist.

Eine H-Menge A ist genau dann injektiv, wenn sie injektiv ist im Sinne von HS73, Def.12.14.

Eine H-Menge A ist genau dann fast trivial, wenn für jede H-Menge B höchstens ein $f : B \longrightarrow A$ existiert.

Die endlichen H-Mengen werden in § 3 als die finitären H-Mengen charakterisiert.

Wenn A H-unendlich ist und B endlich, dann ist B in A H-einbettbar (d.h. es gibt eine injektive H-Abbildung $m : B \longrightarrow A$). H-abzählbar-unendliche H-Mengen sind gewissermaßen die kleinsten H-Mengen, in die sich alle endlichen H-Mengen einbetten lassen.

1.12 Für $h \in H$ sei $\underline{h}$ folgende H-Menge: $\underline{h}^h := 1 := \{\emptyset\}$ und $\underline{h}^{h'} := \emptyset$ für $h' \neq h$. $\underline{h}$ ist also fast trivial und alle H-Mengen lassen sich als Coprodukt von H-Mengen der Form $\underline{h}$, $h \in H$, darstellen.

1.13 Im folgenden werden Hüllensysteme und Hüllenoperatoren über H-Mengen eine Rolle spielen. Zur Definition dieser beiden Begriffe benötigt man einen vollständigen Verband. Sei $A \in \text{Ens}^H$; ein Hüllensystem über A ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}A$, die gegen beliebige Durchschnitte abgeschlossen ist. Ein Hüllenoperator über A ist eine Abbildung $J : \mathcal{P}A \longrightarrow \mathcal{P}A$, die monoton und idempotent ist und $JX \supseteq X$ für alle $X \subseteq A$ erfüllt. - Entsprechend ist der Begriff algebraisches Hüllensystem definiert, während bei der Definition eines algebraischen Hüllenoperators die Definition der Endlichkeit in 1.11.3 benutzt wird.

Wegen Lemma 1.10 und der Definition der Endlichkeit mit Hilfe des Funktors $(\bullet)^0$ beweist man leicht, daß die bekannten Beziehungen zwischen (algebraischen) Hüllensystemen und (algebraischen) Hüllenoperatoren auch für H-Mengen gelten.

1.14 Für eine H-Menge A ist die Kardinalzahl von A ein H-tupel : $\text{card } A := \langle \text{card } A^h \mid h \in H \rangle$.

Zwei H-Mengen sind genau dann H-isomorph, wenn sie die gleiche Kardinalzahl haben.

1.15 In einer homogenen Algebra ist eine Operation eine Abbildung $\omega: A^n \longrightarrow A$, $n \in \mathbb{N}$, und in homogenen Modellen ist eine Relation eine Teilmenge $\rho \subseteq A^n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Stellenzahl einer Operation bzw. einer Relation ist also ein Element von $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ kann man unter anderem auffassen als :

1. Klasse der endlichen Kardinalzahlen
2. freies Monoid über $\{1\}$
3. freies abelsches Monoid über $\{1\}$

Hieraus ergeben sich drei Möglichkeiten, Stellenzahlen für heterogene Algebren zu definieren:

1. Klasse der endlichen Kardinalzahlen (von H-Mengen)
2. freies Monoid über H
3. freies abelsches Monoid über H

In M59, H63, SM68, BL70, M72 und T73 ist in der einen oder anderen Form die zweite Möglichkeit gewählt worden. Der Grund für diese Wahl liegt meines Erachtens darin, daß man beim Schreiben der Argumente einer Operation oder einer Relation diese Argumente in eine Reihenfolge bringen muß - ein Element w des freien Monoids über H gibt also an, daß das i -te Argument vom Typ sein muß, der durch das i -te Zeichen von w vorgegeben ist.

In dieser Arbeit werden wir dagegen die Möglichkeit 1.) wählen, die zu 3.) äquivalent ist, da es eine bijektive "strukturerhaltende" Zuordnung zwischen den endlichen Kardinalzahlen von H-Mengen und dem freien abelschen Monoid über H gibt. Wir werden im folgenden beide Mengen mit $W(H)$ bezeichnen, mit $+$ werde dementsprechend die Addition im Monoid oder die Operation bezeichnet, die zwei Kardinalzahlen die Kardinalzahl ihres Coproduktes zuordnet. Mit $l(v)$, $v \in W(H)$, werden wir $\text{card } v^0 = \sum \langle v^h \mid h \in H \rangle$ bezeichnen; $l(v)$ heißt die Länge von v . Für $h \in H$ kann $\underline{h}$ (vgl. 1.12) identifiziert werden mit dem von h induzierten Element des freien Erzeugendensystems von $W(H)$ als freiem abelschen Monoid.

An einigen Stellen der Arbeit werden wir noch etwas freier verfahren und beliebige endliche H-Mengen als Elemente von $W(H)$

zulassen. Ebenso lassen wir an manchen Stellen als Stellenzahlen von homogenen Algebren nicht nur endliche Kardinalzahlen, sondern auch endliche Mengen zu.

1.16 Für beliebige Paare von H-Mengen A, B setzen wir
 $A^B := \text{Abb}(B, A) \in \text{Ens}.$

Entsprechend ist für $X \in \text{Ens}^H$ und $R \in \text{Korr}(A, B)$

$$R^X := \{ \langle x, y \rangle \in A^X \times B^X \mid \forall h \in H \quad \forall a \in X^h \quad \langle x^h(a), y^h(a) \rangle \in R \}.$$

Für $f \in \text{Abb}(A, B)$ und $x \in A^X$ gilt also

$$f^X(x) = f \cdot x \in \text{Abb}(X, B) = B^X.$$

Für $h \in H$ besteht eine natürliche Äquivalenz *) zwischen A^h und $A_{\underline{h}}$, so daß wir an einigen Stellen A^h mit $A_{\underline{h}}$ identifizieren werden.

Entsprechend besteht für $v \in W(H)$, $v = n_1 \underline{h}_1 + \dots + n_m \underline{h}_m$ eine natürliche Äquivalenz zwischen A^v und $(A^{h_1})^{n_1} \dots (A^{h_m})^{n_m}$

1.17 Um für $v \in W(H)$ die Elemente aus A^v als endliche Folgen schreiben zu können, führen wir folgende Konvention ein:

Sei $v \in W(H)$, $k = l(v)$ und v sei durch $v = n_1 \underline{h}_1 + \dots + n_m \underline{h}_m$

beschrieben; sei A eine H-Menge. Dann gilt $\langle x_1, \dots, x_k \rangle \in A^v$

genau dann, wenn $x_1 \in A^{h_1} \wedge \dots \wedge x_{n_1} \in A^{h_1}$

$$\wedge x_{n_1+1} \in A^{h_2} \wedge \dots \wedge x_{n_1+n_2} \in A^{h_2}$$

$$\vdots$$

$$\wedge x_{k-n_m+1} \in A^{h_m} \wedge \dots \wedge x_k \in A^{h_m}.$$

Dementsprechend definieren wir

$$v_1 := h_1, \dots, v_{n_1} := h_1,$$

$$v_{n_1+1} := h_2, \dots, v_{n_1+n_2} := h_2,$$

$$\vdots$$

$$v_{k-n_m+1} := h_m, \dots, v_k := h_m.$$

v_i gibt also das Phylum des i-ten Argumentes an.

*) Wenn man die Funktoren $V_h : \text{Ens}^H \longrightarrow \text{Ens}$ mit $V_h(X) = X^h$ und $\text{hom}(\underline{h}, \bullet) : \text{Ens}^H \longrightarrow \text{Ens}$ betrachtet, so gibt es eine natürliche Äquivalenz zwischen diesen beiden Funktoren.

1.18 Wir werden jetzt v -stellige Relationen und v -stellige Operationen definieren, wobei allerdings hier bei einer Operation nicht nur die Stellenzahl, sondern auch das Phylum angegeben werden muß, in dem das Ergebnis der Operation liegt.

Sei $v \in W(H)$, $h \in H$.

Eine v -stellige Relation R auf A ist eine Teilmenge $R \subseteq A^v$.
 Eine v -stellige Operation auf A mit Werten in h ist eine Abbildung $f : A^v \longrightarrow A^h$.

Entsprechend C65 definieren wir Operatorenbereiche und Algebren zu diesen Operatorenbereichen, sowie Homomorphismen, Kongruenzen und Subalgebren.

1.19 Ein Operatorenbereich über H ist ein Tripel $\langle \Omega, w, w' \rangle$, wobei Ω eine Menge ist und $w : \Omega \longrightarrow W(H)$ und $w' : \Omega \longrightarrow H$ Abbildungen sind.

Die Elemente von Ω heißen Operatoren und für $\omega \in \Omega$ heißt $w(\omega)$ die Stellenzahl und $w'(\omega)$ die Wertigkeit von ω .

Statt $\langle \Omega, w, w' \rangle$ werden wir im folgenden einen Operatorenbereich durch Ω bezeichnen. Wenn für $\omega \in \Omega$ gilt $w(\omega) = v$, $w'(\omega) = h$, so schreiben wir kurz $\omega : v \longrightarrow h$.

Wenn $\hat{\Omega} \supseteq \Omega$ und für alle $\omega \in \Omega$ $\hat{w}(\omega) = w(\omega)$ *) und $\hat{w}'(\omega) = w'(\omega)$, nennen wir $\hat{\Omega}$ eine Erweiterung von Ω und Ω eine Einschränkung von $\hat{\Omega}$.

1.20 Sei Ω ein Operatorenbereich über H . Eine Ω -Algebra $\mathcal{A}$ ist gegeben durch ihre Grundmenge $A = U(\mathcal{A})$ und für jedes $\omega \in \Omega$ durch eine $w(\omega)$ -stellige Operation mit Werten in $w'(\omega)$ $\omega_{\mathcal{A}} : A^{w(\omega)} \longrightarrow A^{w'(\omega)}$. **)

Mit $K(\Omega)$ bezeichnen wir die Klasse aller Ω -Algebren.

*) Wenn die Menge der Operatoren eines Operatorenbereiches durch Ω mit einem diakritischen Zeichen bezeichnet wird (z.B. $\tilde{\Omega}$) , werden die Funktionen, die den Operatoren die Stellenzahl bzw. die Wertigkeit zuordnen, mit w bzw. w' und demselben diakritischen Zeichen bezeichnet (z.B. $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$) .

**) Beachte, daß die "Grundmenge" eine H -Menge ist. "Grund- H -Menge" schien uns aber zu umständlich.

Die Konvention von 1.17 wird entsprechend weitergeführt, indem wir für jedes $\omega \in \Omega$ und alle $i \leq l(\omega)$ mit $w_i(\omega)$ das i -te Argument bezeichnen, das in der Folgen-Schreibweise das i -te Argument von ω enthält.

1.21 Sei Ω ein Operatorenbereich und $\hat{\Omega}$ eine Einschränkung von Ω . Sei $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra. Die $\hat{\Omega}$ -Algebra $\hat{\mathcal{A}}$, für die gilt $U(\hat{\mathcal{A}}) = U(\mathcal{A})$ und $\omega_{\hat{\mathcal{A}}} = \omega_{\mathcal{A}}$ für $\omega \in \hat{\Omega}$, wird als $\hat{\Omega}$ -Redukt von $\mathcal{A}$ bezeichnet.

1.22 Die Operationen $\omega_{\mathcal{A}}$, $\omega \in \Omega$, einer Ω -Algebra $\mathcal{A}$ werden auch als Grundoperationen von $\mathcal{A}$ bezeichnet. Für bestimmte Begriffe (subalgebraische Mengen, Kongruenzen, Polynome, algebraische Funktionen, Translationen u.a.) ist nur die Angabe der Grundoperationen wichtig - ohne Bezug auf einen Operatorenbereich Ω . Daher definieren wir eine Algebra $\mathcal{A}$ durch die Grundmenge $A = U(\mathcal{A})$ und durch eine Menge $Op(\mathcal{A})$ von Operationen auf $\mathcal{A}$. Jeder Ω -Algebra $\mathcal{A}$ ist die Algebra über der Grundmenge $A = U(\mathcal{A})$ mit $Op(\mathcal{A}) = \{\omega_{\mathcal{A}} \mid \omega \in \Omega\}$ zugeordnet, die im folgenden auch mit $\mathcal{A}$ bezeichnet wird. Begriffe, die für Algebren definiert werden, sind dadurch also auch für Ω -Algebren anwendbar.

1.23 Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra.

1. $B \subseteq A$ heißt subalgebraisch - kurz $B \in \text{Sub}(\mathcal{A})$ - falls für alle $r \in Op(\mathcal{A})$, $r : A^V \longrightarrow A^h$, gilt

$$\forall x \in B^V \quad r(x) \in B^h$$

2. $\theta \in \text{Equ}(A)$ heißt Kongruenz - kurz $\theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$ - falls für alle $r \in Op(\mathcal{A})$, $r : A^V \longrightarrow A^h$, gilt

$$\forall x, y \in A^V \quad x \equiv y (\theta^V) \rightarrow r(x) \equiv r(y) (\theta^h)$$

1.24 Sei Ω ein Operatorenbereich und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K(\Omega)$,

$R \in \text{Korr}(A, B)$. R heißt ω -verträglich (bzgl. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), wenn für alle $x \in A^{w(\omega)}$ und alle $y \in B^{w(\omega)}$

$$x \equiv y (R^{w(\omega)}) \rightarrow \omega_{\mathcal{A}}(x) \equiv \omega_{\mathcal{B}}(y) (R^{w'(\omega)})$$

R heißt Ω -verträglich, wenn R ω -verträglich ist für alle $\omega \in \Omega$.

$f \in \text{Abb}(A, B)$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ - in Zeichen

$$f \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{oder} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B}$$

wenn f Ω -verträglich bzgl. $\mathcal{A}, \mathcal{L}$ ist.

Man macht sich leicht klar, daß Kongruenzen von Ω -Algebren genau die Ω -verträglichen H-Äquivalenzen sind.

1.25 Auf jeder subalgebraischen Menge einer Ω -Algebra $\mathcal{A}$ kann man genau eine Ω -Algebra definieren, so daß die Inklusionsabbildung ein Homomorphismus ist. Diese Ω -Algebra wird als Subalgebra bezeichnet.

Ebenso läßt sich auf Quotientenmengen nach Kongruenzen genau eine Ω -Algebra definieren, so daß die kanonische H-Abbildung ein Homomorphismus ist. Diese Ω -Algebra wird als Quotientenalgebra - oder kurz als Quotient - bezeichnet.

1.26 Sei $\langle \mathcal{A}_i | i \in I \rangle$ eine Familie von Ω -Algebren. Die Produktalgebra $\mathcal{A} = \prod \langle \mathcal{A}_i | i \in I \rangle$ ist wie folgt definiert:

- a) $U(\mathcal{A}) = A = \prod \langle A_i | i \in I \rangle$
 b) für $\omega \in \Omega$ und $x = \langle x_i | i \in I \rangle \in A^{w(\omega)}$ ist
 $\omega_{\mathcal{A}}(x) = \langle \omega_{\mathcal{A}_i}(x_i) | i \in I \rangle$.

Man macht sich leicht klar, daß die Projektionen

$$\text{pr}_i : \begin{cases} \prod A_i \longrightarrow A_i \\ \langle x_i | i \in I \rangle \longmapsto x_i \end{cases} \quad \text{Homomorphismen sind.}$$

1.27 Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und V eine H-Menge, die "Variablenmenge". Die H-Menge der V-stelligen Polynome von $\mathcal{A}$ - in Zeichen $\text{Pol}(\mathcal{A}, V)$ - wird rekursiv definiert:

1. Für $h \in H$ und $k \in V^h$ ist

$$\text{pr}_k : \begin{cases} A^V \longrightarrow A^h \\ x \longmapsto x^{h(k)} \end{cases}, \text{ und } \text{pr}_k \in \text{Pol}^h(\mathcal{A}, V).$$

2. Sei $r \in \text{Op}(\mathcal{A})$, $r : A^w \longrightarrow A^h$ und $\langle p_1, \dots, p_n \rangle \in \text{Pol}^w(\mathcal{A}, V)$, dann ist $r(p_1, \dots, p_n) \in \text{Pol}^h(\mathcal{A}, V)$ mit

$$r(p_1, \dots, p_n) : \begin{cases} A^V \longrightarrow A^h \\ x \longmapsto r(p_1(x), \dots, p_n(x)) \end{cases}.$$

3. $\text{Pol}(\mathcal{A}, V)$ enthält genau die Abbildungen, die in endlich vielen Schritten aus 1. und 2. gewonnen werden können.

Man kann also - wie bei homogenen Algebren - $\text{Pol}(\mathcal{A}, V)$ als subalgebraische Menge von $\mathcal{A}^{A^V}$ auffassen, die von den Projektionen pr_k erzeugt wird. Hierbei ist zu beachten, daß A^V eine Menge ist und somit $\mathcal{A}^{A^V} = \Pi \langle \mathcal{A} \mid i \in A^V \rangle$.

Für $p \in \text{Pol}^h(\mathcal{A}, V)$ schreiben wir häufig $w(p) = V$, $w'(p) = h$, oder noch kürzer $p : V \longrightarrow h$, wenn klar ist, daß p ein Polynom von $\mathcal{A}$ ist.

1.28 Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\tilde{\mathcal{A}}$ die Algebra, die entsteht, wenn man die Elemente der Phyla als nullstellige Grundoperationen hinzu nimmt. $\text{AlgFu}(\mathcal{A}, V) := \text{Pol}(\tilde{\mathcal{A}}, V)$ ist die H-Menge der algebraischen Funktionen von $\mathcal{A}$.

1.29 Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, sei $r : A^V \longrightarrow A^{h'}$ eine Grundoperation von $\mathcal{A}$ und $h \in H$, $a \in v^h$ (*). Sei (a) die H-Menge mit $(a)^h := \{a\}$ und $(a)^g := \emptyset$ für $g \neq h$, sei $\hat{v} := v \setminus (a)$. Es gilt also $v = \hat{v} \cup (a) = \hat{v} \sqcup (a) = \hat{v} \sqcup h$. Somit können wir $A^v \cong A^{\hat{v} \sqcup h}$ mit $A^{\hat{v}} \times A^h$ identifizieren. Sei $z \in A^{\hat{v}}$.

Die Abbildung $t : \begin{cases} A^h & \longrightarrow A^{h'} \\ x & \longmapsto r(z, x) \end{cases}$ ist eine elementare Translation.

Eine Translation ist eine Abbildung, die sich als Komposition von elementaren Translationen darstellen läßt, oder die die Form 1_{A^h} hat für ein $h \in H$.

1.30 Bei heterogenen Algebren $\mathcal{A}$ ist eine Konstante ein Element a , so daß es ein Polynom p gibt und $p(x_1, \dots, x_n) = a$ für alle $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in A^{w(p)}$. Im homogenen Fall kann man sich o.B.d.A. auf unäre Polynome beschränken. Im heterogenen Fall sieht man analog, daß man sich auf Polynome beschränken kann, deren Stellenzahl fast trivial ist - falls $\text{card } H > 1$, brauchen die Polynome aber nicht mehr unär zu sein.

*) Beachte, daß v^h eine (endliche) Kardinalzahl ist und daher eine Menge. a ist also eine Kardinalzahl und $a < v^h$.

1.31 Die Definition von Polynomsymbolen stellen wir zurück zum folgenden Paragraphen, da einige Ergebnisse, die dort abgeleitet werden, für die Definition von Polynomsymbolen notwendig sind.

1.32 Bei der Theorie der heterogenen Algebren haben die Operatorenbereiche selber schon eine gewisse Struktur.

Sei $\langle \Omega, w, w' \rangle$ ein heterogener Operatorenbereich und $\langle \Omega^0, a \rangle$ der homogene Operatorenbereich mit $\Omega^0 := \Omega$, $a(\omega) := 1(w(\omega))$ (vgl. C65, II.2). $\mathcal{H}_\Omega$ sei folgende partielle Ω^0 -Algebra über der Grundmenge H : Für $\omega \in \Omega$ und $\langle h_1, \dots, h_n \rangle \in H^{a(\omega)}$ sei

$$\omega_{\mathcal{H}}(h_1, \dots, h_n) := \begin{cases} w'(\omega) & \text{falls } \underline{h}_1 + \underline{h}_2 + \dots + \underline{h}_n = w(\omega) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Eine Menge $F \subseteq H$ heißt Ω -abgeschlossen, falls F subalgebraisch in $\mathcal{H}_\Omega$ ist.

Eine gewisse Rolle in einigen Beweisen spielt folgendes

Lemma: Sei $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra und $F \subseteq H$. Äquivalent sind:

(i) F ist Ω -abgeschlossen

(ii) Die H -Menge A_F mit $A_F^h = \begin{cases} A^h & \text{falls } h \in F \\ \emptyset & \text{falls } h \notin F \end{cases}$ ist subalgebraisch in $\mathcal{A}$.

§ 2 Homogenisierung

Bekanntlich gelten die wesentlichen Sätze der homogenen Algebra in der entsprechenden Interpretation auch für heterogene Algebren. In den Arbeiten H63, S65, S66, BL70 hat man jeweils gewisse Sätze der homogenen Algebra gewissermaßen "komponentenweise" für heterogene Algebren neu bewiesen. Diese ist in gewisser Weise ein frustrierendes Verfahren. Da Kategorien von heterogenen Algebren sich im allgemeinen nicht als direkte Produkte von Kategorien homogener Algebren darstellen lassen, kann man nämlich nicht auf die Prüfung jedes einzelnen Beweisschrittes verzichten; in unserem Arbeitspapier M72 haben wir einen Satz der homogenen Algebra angegeben, der sich nicht in die Theorie der heterogenen Algebren verallgemeinern läßt: es gibt (heterogene) algebraische Hüllensysteme, die nicht konkret darstellbar sind als Menge aller subalgebraischen Mengen einer heterogenen Algebra.

Andererseits hat der Leser nach einem Beweis eines Satzes der heterogenen Algebra, den er in der homogenen Form schon kannte, das Gefühl, daß er ohnehin schon alles vorher gewußt habe. Unseres Erachtens ist auch dieses Mißverhältnis von Papier zu Geist einer der Gründe, daß über heterogene Algebren verhältnismäßig wenige Arbeiten existieren. Die bekannten Analogien etwa der Automatentheorie zur Algebra versucht man dann eher kategorientheoretisch zu lösen.

Hier soll jetzt ein neuer Weg skizziert werden, wie man schon bewiesene Sätze der homogenen Algebra für heterogene Algebren übertragen kann: indem man das heterogene Problem in ein homogenes Problem übersetzt und dann bekannte Sätze anwenden kann. Dieses Verfahren nennen wir "Homogenisierung".

Entsprechend dem Operator "o" (vgl. 1.09) , mit dem man viele mengen- und verbandstheoretische Fragen der heterogenen Mengen lösen kann, führen wir den Operator "*" ein, der helfen soll, Entsprechendes für heterogene Algebren zu lösen.

2.1 Definition

Sei Ω ein (heterogener) Operatorenbereich, A, B seien H -Mengen und $\Phi \in \text{Korr}(A, B)$, sei $f : A^B \longrightarrow A^h$ eine Operation und $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra.

1. Ω^* ist folgender homogener Operatorenbereich:

$$\Omega^* = \langle \Omega^*, a \rangle, \quad \Omega^* = \Omega \cup \{\S\}, \\ a(\omega) = \omega^0(\omega) \quad \text{für } \omega \neq \S, \quad a(\S) = 0$$

2. A^* ist folgende Menge: $A^* := A^0 \cup \{\S\}$

3. $\Phi^* \subseteq A^* \times B^*$ ist folgende Korrespondenz:

$$\Phi^* = \Phi^0 \cup \{\langle \S, \S \rangle\}.$$

Insbesondere sei $\iota_{AB}^* := \{\langle x, y \rangle \mid x=y=\S \vee \exists h \, x \in A^h \wedge y \in B^h\}$

4. Die Zuordnung $A^B \longrightarrow (A^0)^{B^0} : r \longmapsto r^0$ ist injektiv und außerdem ist $(A^0)^{B^0} \subseteq (A^*)^{B^0}$ und $A^0 \subseteq A^*$.

Daher ist folgende Definition sinnvoll:

$f^* : (A^*)^{B^0} \longrightarrow A^*$ ist folgende Abbildung

$$f^*(x) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{falls } x = \bar{x}^0 \\ \S & \text{falls kein } \bar{x} \text{ existiert mit } x = \bar{x}^0. \end{cases}$$

Für $z \in A^B$ ist also $f(z) = f^*(z^0)$.

5. $\mathcal{A}^*$ ist folgende Ω^* -Algebra:

$$U(\mathcal{A}^*) = A^*; \quad \text{für } \omega \in \Omega \text{ ist } \omega_{\mathcal{A}^*} = \omega_{\mathcal{A}}^*; \quad \S_{\mathcal{A}^*} = \S.$$

Die Kongruenzen, Subalgebren, Homomorphismen und Polynome verhalten sich, wie in den folgenden Lemmata angegeben.

2.2 Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra und $B \subseteq A$. Äquivalent sind:

- (i) $B \in \text{Sub}(\mathcal{A})$
- (ii) $B^* \in \text{Sub}(\mathcal{A}^*)$

Beweis:

(i) $\implies$ (ii)

Sei $x \in (B^*)^{a(\omega)}$. Falls $\bar{x} \in B^{w(\omega)}$ existiert und $x = \bar{x}^0$, ist $\omega_{\mathcal{A}}^*(x) = \omega_{\mathcal{A}}(\bar{x}) \in B^{w'(\omega)} \subseteq B^*$.

Im anderen Falle ist $\omega_{\mathcal{A}}^*(x) = \S \in B^*$.

(ii) $\implies$ (i)

Sei $x \in B^{w(\omega)}$. Es ist $\omega_{\mathcal{A}}(x) = \omega_{\mathcal{A}}^*(x^0) \in B^* \cap A^{w'(\omega)} = B^{w'(\omega)} \quad \therefore$

2.3 Corollar

Sei $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra. Die Verbände $\text{Sub}(\mathcal{A})$ und $\text{Sub}(\mathcal{A}^*)$ sind isomorph.

2.4 Lemma

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Ω -Algebren und $R \in \text{Korr}(A, B)$.

Äquivalent sind:

- (i) R ist Ω -verträglich bzgl $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
- (ii) R^* ist Ω^* -verträglich bzgl $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$.

Beweis:

(i) $\implies$ (ii)

Sei $x \equiv y ((R^*)^{a(\omega)})$. Für $\omega = \S$ ist $\omega_{\mathcal{A}}^*(x) = \omega_{\mathcal{B}}^*(y) = \S$.

Sei $\omega \neq \S$. Falls $\bar{x} \in A^{w(\omega)}, \bar{y} \in B^{w(\omega)}$ existieren mit $x = \bar{x}^0, y = \bar{y}^0$, ist nach Definition $\bar{x} \equiv \bar{y} (R^{w(\omega)})$ und daher

$$\omega_{\mathcal{A}^*}(x) = \omega_{\mathcal{A}}^*(x) = \omega_{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \omega_{\mathcal{B}}(\bar{y}) = \omega_{\mathcal{B}}^*(y) = \omega_{\mathcal{B}^*}(y) \quad (R^{w'(\omega)})$$

Wegen $R^{w'(\omega)} \subseteq R^*$, also auch $\omega_{\mathcal{A}^*}(x) \equiv \omega_{\mathcal{B}^*}(y) (R^*)$.

Falls kein $\bar{x} \in A^{w(\omega)}$ existiert mit $\bar{x}^0 = x$, existiert wegen $x \equiv y ((\mathcal{A}^*)^{a(\omega)})$ kein $\bar{y} \in B^{w(\omega)}$ mit $\bar{y}^0 = y$ und daher ist

$$\omega_{\mathcal{A}^*}(x) = \S = \omega_{\mathcal{B}^*}(y)$$

(ii) $\implies$ (i)

Sei $x \equiv y (R^{w(\omega)})$, also auch $x^0 \equiv y^0 ((R^*)^{a(\omega)})$. Es ist dann

$$\omega_{\mathcal{A}}(x) = \omega_{\mathcal{A}}^*(x^0) = \omega_{\mathcal{A}^*}(x^0) \equiv \omega_{\mathcal{B}^*}(y^0) = \omega_{\mathcal{B}}^*(y^0) = \omega_{\mathcal{B}}(y) \quad (R^*)$$

Wegen $R^{w'(\omega)} = R^* \cap (A^{w'(\omega)} \times B^{w'(\omega)})$ folgt die Behauptung. $\therefore$

2.5 Corollar

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Ω -Algebren und $R \in \text{Korr}(A, B)$, $S \in \text{Korr}(B, C)$ Ω -verträgliche H-Korrespondenzen, $\hat{A} \in \text{Sub}(\mathcal{A})$.

$\hat{A} * R \in \text{Sub}(\mathcal{B})$ und $\bar{R}$ und $R * S$ sind Ω -verträglich.

Beweis: C65, Lemma II.3.1, und Lemma 2.4 $\therefore$

Hieraus folgt insbesondere, daß der Kern eines Homomorphismus eine Kongruenz ist, daß Bilder und Urbilder von subalgebraischen Mengen unter Homomorphismen subalgebraisch sind, daß die Komposition von Homomorphismen ein Homomorphismus ist und daß bijektive Homomorphismen Isomorphismen sind.

Weitere Konsequenzen von Lemma 2.4 sind folgende Corollare:

2.6 Corollar

Sei $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra, $\theta \in \text{Equ}(A)$. Äquivalent sind:

- (i) $\theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$.
- (ii) $\theta^* \in \text{Con}(\mathcal{A}^*)$.

2.7 Corollar

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Ω -Algebren, $f : A \longrightarrow B$ eine H-Abbildung.

Äquivalent sind:

- (i) $f \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
- (ii) $f^* \in \text{Hom}(\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*)$

Die Verbände $\text{Con}(\mathcal{A})$ und $\text{Con}(\mathcal{A}^*)$ sind aber nicht isomorph, sondern Corollar 2.6 sagt nur aus, daß $\text{Con}(\mathcal{A})$ in $\text{Con}(\mathcal{A}^*)$ einbettbar ist. Wenn man dagegen definiert

$$\text{Equ}^*(A) := \{ \theta \in \text{Equ}(A^*) \mid \theta \subseteq \iota_{AA}^* \} \quad \text{und}$$

$$\text{Con}^*(\mathcal{A}) := \text{Equ}^*(A) \cap \text{Con}(\mathcal{A}^*), \quad \text{dann gilt}$$

2.8 Corollar

Sei $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra.

Die Verbände $\text{Con}^*(\mathcal{A})$ und $\text{Con}(\mathcal{A})$ sind isomorph.

2.9 Corollar

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\tilde{\mathcal{A}}$ die Algebra, die genau die elementaren Translationen von $\mathcal{A}$ als Grundoperationen hat.

Es ist $\text{Con}(\mathcal{A}) = \text{Con}(\tilde{\mathcal{A}})$.

Beweis: C65, Prop II.6.1 und Lemma 2.4

:/:

Weitere wichtige Folgerungen von Lemma 2.2 und Corollar 2.6 sind insbesondere:

2.10 Lemma

Sei $\mathcal{A} \in K(\Omega)$. $\text{Sub}(\mathcal{A})$ und $\text{Con}(\mathcal{A})$ sind algebraische Hüllensysteme. $\text{Con}(\mathcal{A})$ ist ein Unterverband von $\text{Equ}(A)$.

2.11 Lemma (Induktionsprinzip)

Sei $\mathcal{A} \in K(\Omega)$, $X \subseteq A$ sei ein Erzeugendensystem. Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die für die Elemente von X^0 gilt und wenn sie für $x_1, \dots, x_n$ gilt, $\omega \in \Omega$ ist und

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in A^{w(\omega)}$, dann gelte $\mathcal{E}$ für $\omega_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$.

$\mathcal{E}$ gilt für alle Elemente von A^0 .

Im folgenden werden wir Polynomsymbole, Gleichungen und quantorenfreie Formeln definieren. Dieses geschieht im wesentlichen über endliche Folgen von Elementen einer gegebenen Menge, d.h. Abbildungen von endlichen Ordinalzahlen in diese Menge. Wir setzen als bekannt voraus, wie solche Folgen verkettet werden können - die Verkettung wird dargestellt durch Hintereinanderschreiben der Folgen. Für eine Menge X sei $\text{Wort}(X)$ die Menge aller endlichen Folgen von Zeichen aus X , $l(r)$ sei die Länge eines Wortes $r \in \text{Wort}(X)$. Für $x \in X$ sei $\underline{x}$ die Folge der Länge 1, die den Wert x hat.

2.12 Definition

Sei X eine H -Menge, Ω ein Operatorenbereich über H . $\mathcal{M}(\Omega, X)$ sei die folgendermaßen definierte Ω -Algebra:

$$W^h(\Omega, X) := \text{Wort}(\Omega \sqcup X^0) \quad \text{für alle } h \in H.$$

Für $\omega \in \Omega$ und $\langle p_1, \dots, p_n \rangle \in W^{w(\omega)}(\Omega, X) = W^n(\Omega, X)$ ist

$$\omega_{no}(p_1, \dots, p_n) := \underline{\omega} p_1 \dots p_n. \quad \text{Für } h \in H \text{ sei}$$

$$\underline{X}^h := \{ \underline{x} \mid x \in X^h \} \quad \text{und} \quad \text{Pol}(\Omega, X) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, X) \quad \text{die von } \underline{X} \text{ erzeugte Subalgebra.}$$

Die H -Abbildung $X \longrightarrow \text{Pol}(\Omega, X) : x \longmapsto \underline{x}$ bezeichnen wir im folgenden mit η_X^P .

Der wichtigste Zusammenhang zum Operatorenbereich Ω^* wird durch folgendes Lemma gehen:

2.13 Lemma

Sei $X \in \text{Ens}^H$. $\text{Pol}^0(\Omega, X) \subseteq \text{Pol}(\Omega^*, X^0)$.

Beweis:

Trivialerweise ist $\text{Wort}(\Omega^* \sqcup X^0) = \text{Wort}(\Omega \sqcup X^*)$ und $\mathcal{M}(\Omega, X)$ eine Subalgebra von $\mathcal{M}(\Omega, X^*)$. Mit Hilfe des Induktionsprinzips folgert man, daß jedes Polynomsymbol entweder die Länge 1 hat oder mit einem Operator beginnt. In beiden Fällen ist das Phylum des Polynomsymbol eindeutig festgelegt, d.h. es ist $\text{Pol}^h(\Omega, X) \cap \text{Pol}^{h'}(\Omega, X) = \emptyset$ für $h \neq h'$ und wir können daher $\text{Pol}^0(\Omega, X) = \bigcup \langle \text{Pol}^h(\Omega, X) \rangle$ setzen, so daß die behauptete Aussage überhaupt erst sinnvoll wird.

Für $x \in X^h$ ist $\underline{x} \in \text{Pol}^h(\Omega^*, X^0)$. Sei $p_1, \dots, p_n \in \text{Pol}^0(\Omega, X)$, so daß $\langle p_1, \dots, p_n \rangle \in \text{Pol}^{w(\omega)}$ und es gelte

$p_1, \dots, p_n \in \text{Pol}(\Omega^*, X^0)$, dann ist $\underline{\omega} p_1 \dots p_n \in \text{Pol}(\Omega^*, X^0)$.

Nach dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung. $:/:$

2.14 Vereinbarung

Die Abbildung $w' : \text{Pol}^0(\Omega, V) \longrightarrow H$ wird erweitert zu einer Abbildung $w' : \text{Pol}(\Omega^*, V^0) \longrightarrow H \cup \{\S\}$:

1.) Für $x \in V^h$ sei $w'(x) = h$

2.) Für $\omega \in \Omega$ und $p_1, \dots, p_n \in \text{Pol}(\Omega^*, V^0)$ sei

$$w'(\underline{\omega} p_1 \dots p_n) = \begin{cases} w'(\omega) & \text{falls } w_i(\omega) = w'(p_i) \text{ für } i \leq n \\ \S & \text{sonst} \end{cases}$$

3.) $w'(\S) = \S$

Es gilt also $\text{Pol}^0(\Omega, V) = \{p \in \text{Pol}(\Omega^*, V^0) \mid w'(p) \neq \S\}$.

Sei $\text{Pol}^c(\Omega, V) := \text{Pol}(\Omega^*, V^0) \setminus \text{Pol}^0(\Omega, V) = \{p \in \text{Pol}(\Omega^*, V^0) \mid w'(p) = \S\}$

Wie im homogenen Fall gilt

2.15 Theorem

Sei $X \in \text{Ens}^H$; $\text{Pol}(\Omega, X)$ ist die freie Algebra über X in $K(\Omega)$.

Beweis:

Seien $X \in \text{Ens}^H$, $\mathcal{A} \in K(\Omega)$ und $f : X \longrightarrow \mathcal{A}$ beliebig. Sei

$\hat{f} : \text{Pol}(\Omega^*, X^0) \longrightarrow \mathcal{A}^*$ die homomorphe Fortsetzung von

$f^0 : X^0 \longrightarrow \mathcal{A}^*$. Sei $\tilde{f} : \text{Pol}^0(\Omega, X) \longrightarrow \mathcal{A}$ die Einschränkung

von $\hat{f}$ auf $\text{Pol}(\Omega, X)$ (vgl. Lemma 2.13). Man verifiziert di-

rekt, daß $\tilde{f} : \text{Pol}(\Omega, X) \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Homomorphismus ist. Da f

auf einem Erzeugendensystem von $\text{Pol}(\Omega, X)$ vorgegeben ist,

folgt die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ aus dem Induktionsprinzip. $:/:$

Im folgenden bezeichnen wir für eine H-Abbildung

$f : X \longrightarrow U(\mathcal{A})$ den wegen Theorem 2.15 induzierten Homomor-

phismus $\text{Pol}(\Omega, X) \longrightarrow \mathcal{A}$ mit $\tilde{f}_{\mathcal{A}}$. Es gilt also für alle

$x \in X^h$ $f^h(x) = \tilde{f}_{\mathcal{A}}^h(\underline{x})$, also $f = \tilde{f}_{\mathcal{A}} \cdot \eta_X^P$.

Mit Hilfe dieses "Hutoperators" können wir jetzt auch Polynome durch Polynomsymbole auf Algebren induzieren:

Sei $p \in \text{Pol}^h(\Omega, X)$ und $\mathcal{A} \in K(\Omega)$. Das Polynom $p_{\mathcal{A}}$ ist definiert durch $p_{\mathcal{A}}(x) := \tilde{x}_{\mathcal{A}}^h(p)$.

Als nächstes werden wir die Begriffe "Gleichung", "Quasigleichung" und "Formel" definieren, die zur syntaktischen Beschreibung von Klassen von Ω -Algebren notwendig sind.

2.16 Definition

Sei V eine H -Menge - die H -Menge der Variablen. Ein Element $x \in V^h$ nennen wir auch "Variable vom Typ h ". Eine Gleichung mit der Variablenmenge V über dem Operatorenbereich Ω ist ein Element

$\langle r, s \rangle \in \text{Gl}^h(\Omega, V) := \text{Pol}^h(\Omega, V) \times \text{Pol}^h(\Omega, V)$ für ein $h \in H$. Statt $\langle r, s \rangle$ schreiben wir meist " $r=s$ ".

Sei " $r=s$ " $\in \text{Gl}^h(\Omega, V)$ und $\mathcal{A} \in K(\Omega)$. Eine Belegung der Variablen ist eine H -Abbildung $g : V \longrightarrow A$. " $r=s$ " wird in $\mathcal{A}$ unter der Belegung g erfüllt - in Zeichen $\mathcal{A} \models_g "r=s"$ - wenn $\bar{g}_{\mathcal{A}}^h(r) = \bar{g}_{\mathcal{A}}^h(s)$ (also $r_{\mathcal{A}}(g) = s_{\mathcal{A}}(g)$). " $r=s$ " gilt in $\mathcal{A}$ - in Zeichen $\mathcal{A} \models "r=s"$ - wenn für alle Belegungen $g : V \longrightarrow A$ gilt $\mathcal{A} \models_g "r=s"$ (äquivalent $r_{\mathcal{A}} = s_{\mathcal{A}}$).

Es ist klar, daß für $X \subseteq Z$ $\text{Gl}(\Omega, X) \subseteq \text{Gl}(\Omega, Z)$. Andererseits ist für die Gültigkeit einer Gleichung die H -Menge der Variablen relevant. Sei z.B. H zweielementig und $X = \langle \{x, y\}, \emptyset \rangle$, $Z = \langle \{x, y\}, \{z\} \rangle$; es ist also $X \subseteq Z$. Die Gleichung " $x=y$ " $\in \text{Gl}(\Omega, X)$ gilt in einer Ω -Algebra $\mathcal{A}$ genau dann, wenn das erste Phylum höchstens ein Element besitzt. Die Gleichung " $x=y$ " $\in \text{Gl}(\Omega, Z)$ gilt in einer Ω -Algebra $\mathcal{A}$ genau dann, wenn das erste Phylum höchstens ein Element besitzt oder wenn das zweite Phylum leer ist (dann gibt es nämlich keine Belegung $g : Z \longrightarrow A$ und somit ist die Bedingung der Definition 2.16 erfüllt).

In der homogenen Modelltheorie kann man dagegen immer davon ausgehen, daß die Variablenmenge einer Gleichung abzählbar unendlich ist, wovon jeweils eine endliche Teilmenge in einer Formel vorkommt. Formeln mit einer leeren Variablenmenge sind nur nichttrivial im Fall von Gleichungen zwischen (nullstelligen) Polynomen und boolschen Polynomen über solchen Gleichungen - wenn es nullstellige Polynome gibt, gibt es keine leeren Modelle. Jede nicht-triviale Belegung einer endlichen Variablenmenge

kann also zu einer Belegung einer beliebigen, diese Variablenmenge enthaltenden Menge, erweitert werden. Das obige Beispiel macht klar, warum das nicht entsprechend bei H-Mengen gilt, wenn $\text{card } H \geq 2$. Die kategorientheoretische Sonderrolle der Kategorie Ens gegenüber Ens^H liegt also darin, daß jedes Objekt $A \in \text{Ens}$ entweder injektiv ist ($A \neq \emptyset$) oder initial ($A = \emptyset$).

Wenn bei einer Gleichung die Variablenmenge nicht offensichtlich aus dem Textzusammenhang hervorgeht, wird die Variablenmenge rechts oben an das Zeichen " $\models$ " angeschrieben, z.B. $\alpha \models^X "r=s"$. Dasselbe gilt für die im folgenden zu definierenden (quantorenfreien) Formeln.

2.17 Definition

Die Menge der Formeln mit der Variablenmenge $V = \text{Univ}(\Omega, V)$ - ist die freie Boolsche Algebra über $\text{Gl}^0(\Omega, V)$. Eine Formel hat also immer die Form $b = "b(r_1=s_1, \dots, r_n=s_n)"$, wobei b ein Boolesches Polynom ist und " $r_i=s_i$ " Gleichungen mit der Variablenmenge V .

Eine Belegung $g : V \longrightarrow A$ erfüllt eine Formel $b = "b(r_1=s_1, \dots, r_n=s_n)"$ in α - in Zeichen $\alpha \models_g b$ - genau dann, wenn $b_2([\alpha \models_g "r_1=s_1"], \dots, [\alpha \models_g "r_n=s_n"]) = 1$. Hierbei sei $2 = \langle \{0,1\}, \max, \min, 1-\cdot, \cdot, 0 \rangle$ die zwei-elementige Boolsche Algebra und $[\alpha \models_g "r_i=s_i"]$ habe den Wert 1 genau dann, wenn $\alpha \models_g "r_i=s_i"$ gilt.

Eine Formel $b \in \text{Univ}(\Omega, V)$ gilt in α - in Zeichen $\alpha \models b$ - wenn für alle Belegungen $g : V \longrightarrow A$ gilt $\alpha \models_g b$.

Im folgenden werden wir für eine Formel

$b = "b(r_1=s_1, \dots, r_n=s_n)"$ die Gleichungen " $r_1=s_1$ ", ..., " $r_n=s_n$ " als atomare Formeln von b bezeichnen.

2.18 Definition

Eine Quasigleichung ist eine Formel, die die Form

$$"r_1=s_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}=s_{n-1} \rightarrow r_n=s_n"$$

hat, wobei der Fall, daß $n = 1$, also Gleichungen, zugelassen sind. Sei $Qgl(\Omega, V) \subseteq Univ(\Omega, V)$ die Menge der Quasigleichungen mit den Variablen V .

Wenn $b = "r_1=s_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}=s_{n-1} \rightarrow r_n=s_n"$ eine Quasigleichung ist, bezeichnen wir die Gleichungen $"r_i=s_i"$ für $i \leq n-1$ als Prämissen von b und $"r_n=s_n"$ als die Konklusion von b .

Eine Algebra erfüllt also genau dann eine Quasigleichung b unter einer Belegung g , wenn aus der Gültigkeit aller Prämissen unter der Belegung g die Gültigkeit der Konklusion unter dieser Belegung folgt.

Wir werden in Zukunft Gleichungen auch als spezielle Quasigleichungen auffassen.

Falls $\mathcal{A}$ eine Menge von Formeln ist, werden wir $\mathcal{A} \models \mathcal{A}$ als Abkürzung für $\mathcal{A} \models b$ für alle $b \in \mathcal{A}$ benutzen.

2.19 Definition

Sei $K \subseteq K(\Omega)$. K heißt universell axiomatisch, falls es eine Folge $\langle X_i | i \in I \rangle$ von H-Mengen und eine Folge

$\mathcal{A}_i \subseteq Univ(\Omega, X_i)$ gibt, so daß für $\mathcal{A} \in K(\Omega)$ gilt

$$\mathcal{A} \in K \iff (\mathcal{A} \models \mathcal{A}_i \text{ für alle } i \in I)$$

Falls die Folge der $\mathcal{A}_i$ so gewählt werden kann, daß alle Elemente der $\mathcal{A}_i$ Quasigleichungen sind, heißt K Quasigleichungsklasse oder quasigleichungs-definiert.

Falls die Folge der $\mathcal{A}_i$ so gewählt werden kann, daß alle Elemente der $\mathcal{A}_i$ Gleichungen sind, heißt K Gleichungsklasse oder gleichungs-definiert.

Falls die Folge $\langle X_i | i \in I \rangle$ so gewählt werden kann, daß alle X_i endliche H-Mengen sind, heißt die Klasse K finitär universell axiomatisch (bzw. finitäre Quasigleichungsklasse, finitäre Gleichungsklasse).

Das folgende Lemma zeigt, daß jede universell axiomatische Klasse finitär ist, wenn die Menge H der Phylumsymbole endlich

ist. Wenn H nicht endlich ist, wird im letzten Paragraphen gezeigt, daß es eine Gleichungsklasse gibt, die nicht finitär ist (vgl. 4.23)

2.20 Lemma

Sei die Menge H der Phylumsymbole endlich und $b \in \text{Univ}(\Omega, X)$ eine beliebige Formel. Es gibt eine endliche H -Menge $Z \subseteq X$, so daß für alle $\alpha \in K(\Omega)$ gilt

$$\alpha \models^X b \iff \alpha \models^Z b$$

Beweis:

Sei Y die endliche H -Menge aller in b vorkommenden Variablen und $Y \subseteq Z \subseteq X$, Z sei so gewählt, daß für alle $h \in H$

$X^h = \emptyset \iff Z^h = \emptyset$. Da H endlich ist, kann Z endlich gewählt werden. Es ist also $\text{in}_{ZX} : Z \longrightarrow X$ ein Schnitt und daher ist für eine beliebige H -Menge A

$\{f : Z \longrightarrow A\} = \{g \cdot \text{in}_{ZX} \mid g : X \longrightarrow A\}$. Da außerdem $\alpha \models_g b$ genau dann gilt, wenn $\alpha \models_{g \cdot \text{in}_{ZY}} b$, folgt die Behauptung. $\therefore$

Im folgenden wird gezeigt, daß die Polynome - die deswegen auch "abgeleitete Operationen" heißen - sich gegenüber subalgebraischen Mengen, Kongruenzen, Homomorphismen und Produkten im wesentlichen wie die Grundoperationen verhalten.

2.21 Satz

Sei $p \in \text{Pol}^h(\Omega, V)$ ein Polynomsymbol; $\alpha, \mathcal{L}$ Ω -Algebren.

1. Falls $B \in \text{Sub}(\alpha)$, ist für alle $x \in B^V$ $p_\alpha(x) \in B^h$.
2. Falls $\theta \in \text{Con}(\alpha)$, ist θ p -verträglich.
3. Falls $f \in \text{Hom}(\alpha, \mathcal{L})$, ist f p -verträglich.
4. Falls $\alpha = \prod \langle \alpha_i \mid i \in I \rangle$, ist für alle $\langle x_i \mid i \in I \rangle \in A^V$
 $p_\alpha(\langle x_i \mid i \in I \rangle) = \langle p_{\alpha_i}(x_i) \mid i \in I \rangle$

Beweis:

Da $B \in \text{Sub}(\alpha)$ genau dann gilt, wenn $1_B \in \text{Korr}(A, A)$, mit

$$1_B^h = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in B^h \}, \Omega\text{-verträglich ist, und da } p_\alpha(x) \in B^h$$

äquivalent dazu ist, daß 1_B p -verträglich ist, brauchen wir statt 1. nur zu zeigen :

5. Falls $R \in \text{Korr}(A, B)$ Ω -verträglich ist, ist R auch p -verträglich.

2. und 3. folgen auch sofort aus 5. .

Zu 5.) Sei $R \in \text{Korr}(A, B)$ Ω -verträglich bzgl. $\mathcal{A}, \mathcal{L}$, dann ist nach Lemma 2.4 R^* Ω^* -verträglich bzgl. $\mathcal{A}^*, \mathcal{L}^*$.

Sei $x \equiv y (R^V)$, also $x^0 \equiv y^0 (R^*)^{V^0}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \langle p_{\mathcal{A}}(x), p_{\mathcal{L}}(y) \rangle &= \langle p_{\mathcal{A}}^*(x^0), p_{\mathcal{L}}^*(y^0) \rangle = \langle p_{\mathcal{A}^*}(x^0), p_{\mathcal{L}^*}(y^0) \rangle \\ &= p_{\mathcal{A}^* \sim \mathcal{L}^*}(\langle x^0, y^0 \rangle) \in R^* , \end{aligned}$$

und da $p_{\mathcal{A}}(x) \in A^h, p_{\mathcal{L}}(y) \in B^h$ ist $\langle p_{\mathcal{A}}(x), p_{\mathcal{L}}(y) \rangle \in R^h$.

Zu 4.) Da wir über Homogenisierung von Produkten nichts ausgesagt haben, zeigen wir diesen Satz direkt durch Induktion.

Für $a \in V^h$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \underline{a}_{\mathcal{A}}(\langle x_i | i \in I \rangle) &= \underline{a}_{\mathcal{A}}(\langle x_{i,k} | i \in I, k \in V^0 \rangle) \\ &= \langle x_{i,a} | i \in I \rangle = \langle \underline{a}_{\mathcal{A}_i}(x_i) | i \in I \rangle \end{aligned}$$

Für $p = \omega p_1 \dots p_n$ gilt, wenn $p_1, \dots, p_n$ die Voraussetzungen schon erfüllen :

$$\begin{aligned} (\omega p_1 \dots p_n)_{\mathcal{A}}(\langle x_i | i \in I \rangle) &= \omega_{\mathcal{A}}(p_{1,\mathcal{A}}(\langle x_i | i \in I \rangle), \dots, p_{n,\mathcal{A}}(\langle x_i | i \in I \rangle)) \\ &= \omega_{\mathcal{A}}(\langle p_{1,\mathcal{A}_i}(x_i) | i \in I \rangle, \dots, \langle p_{n,\mathcal{A}_i}(x_i) | i \in I \rangle) \\ &= \omega_{\mathcal{A}_i}(p_{1,\mathcal{A}_i}(x_i), \dots, p_{n,\mathcal{A}_i}(x_i)) \mid i \in I \\ &= \langle (\omega p_1 \dots p_n)_{\mathcal{A}_i}(x_i) \mid i \in I \rangle \quad \quad \quad \therefore \end{aligned}$$

Leider ist die Homogenisierung durch den $*$ -Operator nicht kompatibel mit der Produktbildung. Es gilt hier nur

2.22 Lemma

Sei $\langle \mathcal{A}_i | i \in I \rangle$ eine Folge von Ω -Algebren. Es ist

$(\prod \mathcal{A}_i)^*$ einbettbar in $\prod \mathcal{A}_i^*$.

So gelang es uns auch nicht, den Birkhoff-Satz etwa mit Hilfe der $\ast$ -Homogenisierung zu beweisen. Wir werden daher im nächsten Kapitel die kategorientheoretischen Eigenschaften des Vergiß-funktors $U: \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ untersuchen, wobei K eine Varietät oder Quasivarietät ist. Für Untersuchungen von "mengentheoretischen" und "verbandstheoretischen" Eigenschaften scheint uns dagegen die Homogenisierung das geeignetere Mittel zu sein. Man kann sicher auch hier viele Begriffe kategorientheoretisch simulieren, aber uns scheint die Simulation durch Homogenisierung übersichtlicher. Bei Untersuchungen über Klassen ist die Homogenisierung unseres Erachtens nicht fruchtbar.

§ 3 Kategorien von Ω -Algebren

In diesem Paragraphen werden die Begriffe "regulär", "finitär" und "monadisch", die für die Untersuchung von Kategorien homogener Algebren wichtig sind, für Kategorien heterogener Algebren untersucht.

Wir werden Kategorien durch unterstrichene Großbuchstaben bezeichnen, die entsprechenden Objektklassen durch dieselben, nicht unterstrichenen Großbuchstaben. Bei Morphismen werden wir den Vergißfunktork häufig weglassen und das gleiche Zeichen für einen Morphismus in $\underline{K}$ und in $\underline{\text{Ens}}^H$ benutzen. Für $f: U(\mathcal{A}) \longrightarrow U(\mathcal{B})$ sagen wir kurz " $f \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ " statt " $\exists \bar{f} \in \text{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ U\bar{f}=f$ ". Unterkategorien seien immer voll. Durch $\underline{in}$ werden in Diagrammen Inklusionsabbildungen angegeben, die im Text durch Angabe von Quelle und Ziel erweitert werden, also etwa $\underline{in}_{AB}$. Es können in einem Diagramm also mehrere $\underline{in}$ vorkommen. In der Nomenklatur halten wir uns im wesentlichen an HS73 und ML72.

Sei im Folgenden jeweils Ω ein Operatorenbereich über H und $\underline{K}(\Omega)$ die Kategorie aller Ω -Algebren mit Ω -Homomorphismen, $U: \underline{K}(\Omega) \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ der Vergißfunktork. Für Unterkategorien $\underline{K} \subseteq \underline{K}(\Omega)$ sei $\underline{I}_K: \underline{K} \longrightarrow \underline{K}(\Omega)$ der Inklusionsfunktork und $\underline{U}_K: \underline{U} \circ \underline{I}_K: \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ der Vergißfunktork.

Als erstes zeigen wir die Eigenschaften der Kategorie $\underline{\text{Ens}}^H$, die wir in dieser Arbeit benötigen. 3.1.3 ist äquivalent zum Auswahlaxiom in $\underline{\text{Ens}}$; 3.1.5 wird in 3.4 genauer definiert. Der Begriff "algebroidal" ist im Anhang A definiert und erläutert.

3.1 Theorem

1. $\underline{\text{Ens}}^H$ ist vollständig und covollständig.
2. $\underline{\text{Ens}}^H$ ist lokal klein und lokal coklein.
3. Jeder Epimorphismus in $\underline{\text{Ens}}^H$ ist eine Retraktion.
4. In $\underline{\text{Ens}}^H$ sind gerichtete Limiten von Monomorphismen monomorph.
5. In $\underline{\text{Ens}}^H$ sind Teilmengen von gerichteten Limiten gerichtete Limiten von Teilmengen.
6. $\underline{\text{Ens}}^H$ ist stark algebroidal.

Beweis:

1., 2., 3. und 4. folgen komponentenweise aus den entsprechenden Eigenschaften von $\underline{\text{Ens}}^H$.

5. : vergleiche Theorem 3.4.

6. folgt aus Lemma 3.5 und 3.6.

:/:

3.2 Corollar

Sei f eine H -Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist eine Retraktion

(ii) f ist ein regulärer Epimorphismus.

(iii) f ist ein Epimorphismus.

(iv) Für alle $h \in H$ ist f^h eine surjektive Abbildung.

Beweis:

(i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) gilt für beliebige Kategorien.

(iii) $\implies$ (i) folgt aus 3.1.3.

(iii) $\iff$ (iv) : In $\underline{\text{Ens}}$ sind Epimorphismen die surjektiven Abbildungen und in $\underline{\text{Ens}}^H$ sind Epimorphismen Morphismen, die komponentenweise epimorph sind.

:/:

Insbesondere ist also die Klasse der regulären Epimorphismen unter Komposition abgeschlossen.

3.3 Corollar

$\underline{\text{Ens}}^H$ ist regulär (vgl. Def. A.2)

Beweis:

Man kann diese Aussage komponentenweise aus der Regularität von $\underline{\text{Ens}}$ folgern; nach H74, 1.2c, folgt die Aussage aus Theorem 3.1.1 und 3.1.2 und der Abgeschlossenheit der Klasse der regulären Epimorphismen unter Komposition.

:/:

3.4 Theorem

Sei $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \rangle$ ein gerichteter Limes von

$\langle f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j \rangle$ und sei $B \in A$. Sei

$B_i := f_i^{-1}(B) \in A_i$ und $g_i : B_i \longrightarrow B$ die Einschränkung von f_i auf B_i , $g_{ij} : B_i \longrightarrow B_j$ die Einschränkung von f_{ij} auf B_i . Es ist $\langle g_i : B_i \longrightarrow B \rangle$ ein gerichteter Limes von $\langle g_{ij} : B_i \longrightarrow B_j \rangle$.

Beweis:

$\mathbf{Ens}^H$ ist als Funktorkategorie des elementaren Topos $\mathbf{Ens}$ ein elementarer Topos. Nach W73, Cor. 2.10, erhalten in elementaren Topoi Pullbacks beliebige Colimiten. Die Quadrate in

$$\begin{array}{ccccc}
 A_i & \xrightarrow{f_{ij}} & A_j & \xrightarrow{f_j} & A \\
 \uparrow \text{in}_i & & \uparrow \text{in}_j & & \uparrow \text{in} \\
 B_i & \xrightarrow{g_{ij}} & B_j & \xrightarrow{g_j} & B
 \end{array}$$

sind Pullback-Quadrate.

://

3.5 Lemma

Sei A eine H -Menge. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- (i) A ist endlich
- (ii) A ist stark finitär
- (iii) A ist finitär

Beweis:

(i) $\implies$ (ii)

Wir betrachten $\mathbf{Ens}^H$ als Kommakategorie $(\mathbf{Ens} \downarrow H)$, sei $A = \langle \hat{A}, \psi \rangle$. Sei $\langle f_i : \langle B_i, \varphi_i \rangle \longrightarrow \langle B, \varphi \rangle \rangle$ ein gerichteter Limes und $f : \langle \hat{A}, \psi \rangle \longrightarrow \langle B, \varphi \rangle$ beliebig.

$$\begin{array}{ccccc}
 B_i & \xrightarrow{f_{ij}} & B_j & \xrightarrow{f_j} & B \\
 \downarrow \varphi_i & \nearrow \varphi_j & \nearrow \varphi & \nearrow f & \\
 H & \xleftarrow{\psi} & A & &
 \end{array}$$

(Dashed lines: $B_i \xrightarrow{g} A$, $B_j \xrightarrow{g} A$, $B \xrightarrow{g} A$)

Da $(\bullet)^0$ als links-adjungierter Funktor beliebige Colimiten erhält, ist $\langle f_i : B_i \longrightarrow B \rangle$ ein gerichteter Limes und da nach Definition $\hat{A}$ endlich ist, ist $\hat{A} \in \mathbf{Ens}$ stark finitär. Also gibt es einen Index i und $g : \hat{A} \longrightarrow B_i$, so daß $f = f_i \cdot g$. Es ist $g : \langle \hat{A}, \psi \rangle \longrightarrow \langle B_i, \varphi_i \rangle$, da $\psi = \varphi \cdot f = \varphi \cdot f_i \cdot g = \varphi_i \cdot g$.

Wenn für $g_1, g_2 : \langle \hat{A}, \psi \rangle \longrightarrow \langle B_i, \varphi_i \rangle$ $f_i \cdot g_1 = f_i \cdot g_2$,

gibt es einen Index j und $f_{ij} \cdot g_1 = f_{ij} \cdot g_2$, da $\hat{A}$ stark finitär ist. Somit ist $\langle \hat{A}, \psi \rangle$ stark finitär.

(ii) $\implies$ (iii) ist trivial und (iii) $\implies$ (ii) folgt aus

Lemma A.10

://

3.6 Lemma

Jede H-Menge A ist ein gerichteter Limes ihrer endlichen Teilmengen.

Beweis:

Sei $\langle \text{in}_{A', A''} : A' \longrightarrow A'' \mid A' \subseteq A'' \subseteq A, A'' \text{ endlich} \rangle$ das gerichtete Diagramm der endlichen Teilmengen von A und $\langle f_{A'} : A' \longrightarrow B \mid A' \subseteq A, A' \text{ endlich} \rangle$ eine Senke, die für $A' \subseteq A''$ $f_{A''} = f_{A'} \circ \text{in}_{A', A''}$ erfüllt. Dann ist $f := \bigcup \langle f_{A'} \mid A' \subseteq A, A' \text{ endlich} \rangle$ als H-Korrespondenz eine H-Abbildung und $f_{A'} = f \circ \text{in}_{A', A}$ für endliches $A' \subseteq A$. Die Eindeutigkeit folgt, da jedes Element $x \in A^h$ auf $f_{\hat{A}}^h(x)$ abgebildet werden muß, wobei $\hat{A} \subseteq A$ mit $x \in \hat{A}^h$ beliebig ist. :/:

Als nächstes untersuchen wir die Kategorie $\underline{K}(\underline{\Omega})$ und den Vergißfunktor $U : \underline{K}(\underline{\Omega}) \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$. In 2.15 haben wir bewiesen, daß U einen links-adjungierten besitzt. Wir werden die adjungierte Situation im folgenden durch $(P, U, \eta^P, \varepsilon^P)$ beschreiben. Die nach 2.15 eingeführte Schreibweise $\tilde{f}_{\mathcal{O}}$ für $f : X \longrightarrow U(\mathcal{O})$ wird in diesen kategoriellen Kontext manchmal konventionell als $\varepsilon_{\mathcal{O}}^P \cdot Pf$ beschrieben. Wir benötigen häufig die Gleichheiten, die im Anhang A.4 beschrieben sind.

3.7 Lemma

$U : \underline{K}(\underline{\Omega}) \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ ist regulär im Sinne von H74, d. h. U hat einen links-adjungierten und U erschafft reguläre Faktorisierungen.

Beweis:

(1) Wegen Theorem 2.15 hat U einen links-adjungierten.

(2) Sei $\langle f_i : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_i \mid i \in I \rangle$ eine Quelle in $\underline{K}(\underline{\Omega})$ und

$A \xrightarrow{f_i} A_i = A \xrightarrow{e} X \xrightarrow{m_i} A_i$ eine reguläre Faktorisierung in $\underline{\text{Ens}}^H$. Es gilt dann $\ker e = \bigcap \langle \ker f_i \mid i \in I \rangle$. Da für $i \in I$ $\ker f_i \in \text{Con}(\mathcal{O})$, ist also $\ker e \in \text{Con}(\mathcal{O})$. Somit läßt sich nach 1.25 auf X die Quotientenalgebra $\mathcal{X} \cong \mathcal{O} / \ker e$ definieren.

Zu zeigen bleibt, daß $m_i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{O}_i$ Homomorphismen sind.

Sei $\omega \in \Omega$ und $x \in X^{W(\omega)}$, $x = e^{W(\omega)}(z)$ für ein $z \in A^{W(\omega)}$.

$$\begin{aligned}
 m_i^{W'(\omega)}(\omega_x(x)) &= m_i^{W'(\omega)}(\omega_x(e^{W(\omega)}(z))) \\
 &= m_i^{W'(\omega)}(e^{W'(\omega)}(\omega_n(z))) \\
 &= f_i^{W'(\omega)}(\omega_n(z)) \\
 &= \omega_{\alpha_i}(f_i^{W(\omega)}(z)) \\
 &= \omega_{\alpha_i}(m_i^{W(\omega)}(e^{W(\omega)}(z))) = \omega_{\alpha_i}(m^{W(\omega)}(x)) .
 \end{aligned}$$

:/:

3.8 Lemma

1. $K(\Omega)$ ist regulär
2. $K(\Omega)$ ist eine (regulär epi, mono)-Kategorie
3. U ist transportabel, d.h. für jede Ω -Algebra $\mathcal{A}$ und jede Bijektion $f : A \longrightarrow B$ gibt es genau eine Ω -Algebra $\mathcal{L}$, so daß $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$ ein Isomorphismus ist.
4. Reguläre Epimorphismen sind genau die surjektiven Homomorphismen
5. Monomorphismen sind genau die injektiven Homomorphismen.
6. Isomorphismen sind genau die bijektiven Homomorphismen.
7. Jeder reguläre Epimorphismus $e : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$ ist U -final, d.h. für jeden Homomorphismus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$ ist eine Abbildung $g : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ mit $f = g \cdot e$ ein Homomorphismus.
8. Jede Mono-Quelle $\langle m_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ ist U -initial, d.h. für jede Quelle $\langle f_i : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ ist eine Abbildung $g : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ mit $f_i = m_i \cdot g$ für $i \in I$ ein Homomorphismus.
9. U erhält, reflektiert und erschafft Limiten
10. $K(\Omega)$ ist vollständig und covollständig
11. $K(\Omega)$ ist extrem-epi-coklein, d.h. jede Ω -Algebra hat - bis auf Isomorphie - nur eine Menge von homomorphen Bildern.

Beweis:

1., 3. - 10. folgen unter Zuhilfenahme von 3.1.1, 3.2, 3.3 aus Lemma 3.7 mit Hilfe der Sätze in H74, 2. Abschnitt.

2. folgt aus 1. und H74, Prop 1.3 und Cor. 1.4.

11. folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von $\underline{\text{Ens}}^H$ mit Hilfe der Behauptungen 4. und 3. :/:

Aus 11. erhalten wir wegen HS73, Thm. 37.1 folgendes

3.9 Corollar

Sei $K \subseteq K(\Omega)$. Äquivalent sind:

(i) K ist (regulär epi)-reflektiv in $K(\Omega)$

(ii) K ist abgeschlossen gegen Produkte und Subalgebren.

3.10 Lemma

Sei $K \subseteq K(\Omega)$ abgeschlossen gegen Produkte und Subalgebren.

$U_K : \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ ist regulär.

Bemerkung:

U_K hat also einen links-adjungierten Funktor und die Behauptungen von 3.8 gelten für $\underline{K}$ wie für $\underline{K(\Omega)}$.

Beweis:

$U_K = I_K \circ U$ und U ist regulär. Nach H74, Thm. 2.16, ist U_K genau dann regulär, wenn I_K es ist. Da I_K der Inklusionsfunktor einer reflektiven Unterkategorie ist, ist I_K regulär, wenn $\underline{K}$ mit jedem Morphismus seine reguläre Faktorisierung enthält (vgl. H74, Thm. 3.3) . Das folgt aber aus der Abgeschlossenheit gegen Subalgebren. :/:

Nach dem Begriff "regulär" wird jetzt der Begriff "finitär" untersucht, im wesentlichen also das Verhalten gegen gerichtete Limiten.

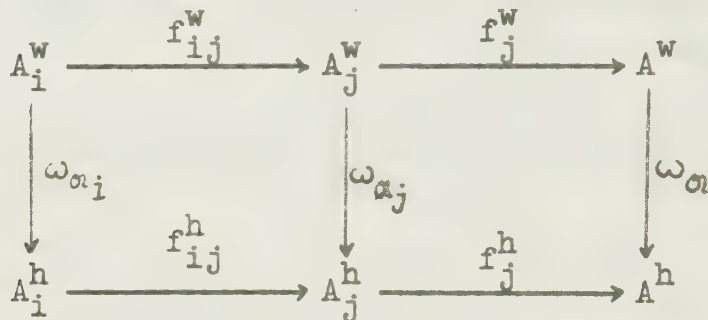
3.11 Lemma

$U : \underline{K(\Omega)} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ erschafft gerichtete Limiten.

Beweis:

Sei $D = \langle f_{ij} : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j \mid i \leq j \in I \rangle$ ein gerichtetes Diagramm von Ω -Algebren und $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \rangle$ der Colimes des

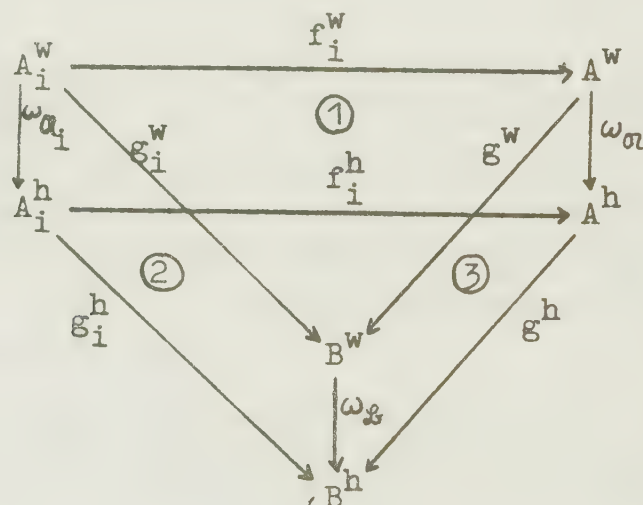
zugrundeliegenden H-Mengen-Diagrammes. Wir konstruieren auf A eine Ω -Algebra-Struktur $\mathcal{A}$. Sei $\omega \in \Omega$; da $w(\omega)$ und $w'(\omega)$ stark finitär sind, ist $\omega_{\mathcal{A}}$ als gerichteter Limes der $\omega_{\mathcal{A}_i}$ definiert.



(wir kürzen $w(\omega)$ durch w und $w'(\omega)$ durch h ab).

Die Kommutativität der Rechtecke drückt genau aus, daß die H-Abbildungen f_{ij} und f_j Ω -Homomorphismen sind. Außerdem ist die Operation $\omega_{\mathcal{A}}$ schon eindeutig festgelegt, da die f_i Ω -Homomorphismen sein müssen.

Wenn $\langle g_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{L} \mid i \in I \rangle$ eine natürliche Senke zu D ist, gibt es genau eine H-Abbildung $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$, so daß für $i \in I$ $g \cdot f_i = g_i$, da $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \rangle$ Colimes in $\underline{\text{Ens}}^H$ ist. Wir zeigen, daß $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$ ein Ω -Homomorphismus ist. Sei $\omega \in \Omega$, $w = w(\omega)$ und $h = w'(\omega)$:



Nach Voraussetzung kommutieren die Rechtecke ① und ② sowie das obere und das untere Dreieck. Für alle $i \in I$ gilt also $\omega_{\mathcal{L}} \cdot g^w \cdot f_i^w = \dots = g^h \cdot \omega_{\mathcal{A}} \cdot f_i^w$; und da $\langle f_i^w \mid i \in I \rangle$ eine Epi-Senke ist, also $\omega_{\mathcal{L}} \cdot g^w = g^h \cdot \omega_{\mathcal{A}}$, d.h. g ist ein Ω -Homomorphismus.

∴

Da Ens^H covollständig ist, ergibt sich hieraus insbesondere

3.12 Corollar

$U : K(\Omega) \longrightarrow \text{Ens}^H$ erhält und reflektiert gerichtete Limiten.

3.13 Theorem

1. Für $\mathcal{A} \in K(\Omega)$ sind äquivalent:

- (i) $\mathcal{A}$ ist endlich präsentiert, d.h. $\mathcal{A} \cong PX/\phi$,
wobei X endlich und ϕ eine endlich erzeugte Kongruenz ist.
- (ii) $\mathcal{A}$ ist stark finitär
- (iii) $\mathcal{A}$ ist finitär

2. $K(\Omega)$ ist stark algebroidal.

Beweis:

Anhang: Theorem A.14 und Theorem A.16

:/:

Als letztes soll der Begriff "monadisch" für Kategorien über Ens^H untersucht werden. Wir zeigen als erstes, daß $U : K(\Omega) \longrightarrow \text{Ens}^H$ monadisch ist; und zum Abschluß zeigen wir, daß stark finitäre monadische Funktoren über Ens^H im wesentlichen finitäre Gleichungsklassen von Ω -Algebren sind. Zum Beweis der letzten beiden Sätze benutzen wir die erst in § 4 bewiesenen semantischen Charakterisierungen von Gleichungsklassen, deren Beweise aber den Begriff monadisch nicht benötigen.

Zum Nachweis, daß $U : K(\Omega) \longrightarrow \text{Ens}^H$ monadisch ist, könnte man etwa die Monade $\mathcal{P} = \langle P, \eta^P, \mu^P \rangle$ direkt angeben:

- 1. Für $X \in \text{Ens}^H$ ist $PX := \text{Pol}(\Omega, X)$
- 2. Für $f : X \longrightarrow Y$ ist $Pf : PX \longrightarrow PY$ die Abbildung, die durch "Ersetzen des Symboles x durch $f(x)$ " definiert wird.
- 3. Für $X \in \text{Ens}^H$ ist $\eta_X^P : X \longrightarrow PX : x \longmapsto \underline{x}$
- 4. Für $X \in \text{Ens}^H$ ist $\mu_X^P : PPX \longrightarrow PX$ die Abbildung, die die "Klammern zweiter Ordnung wegläßt".

Der Nachweis der Gesetze für eine Monade ist dann intuitiv klar, allerdings formal nicht so einfach.

Wir werden daher ein Kriterium von P71, 3.3, heranziehen, mit dem dort auch zum Beispiel gezeigt wurde, daß die Kategorie der Automaten - also die spezielle Kategorie $\underline{K}(\Omega)$ für $H = \{I, \emptyset, S\}$, $\Omega = \{\delta : I+S \longrightarrow S, \lambda : I+S \longrightarrow \emptyset\}$ - monadisch ist.

3.14 Theorem

$U : \underline{K}(\Omega) \longrightarrow \underline{Ens}^H$ ist monadisch.

Beweis:

Unter Benutzung von 3.3 in P71 haben wir 5 Eigenschaften nachzuweisen:

1. U besitzt einen links-adjungierten
2. U ist treu
3. U erschafft Retraktion-Monopaar-Faktorisierungen
4. U erschafft Coegalisateuren von U -Kernpaaren, deren U -Bilder retraktive Coegalisateuren besitzen
5. U reflektiert Identitäten

Die Eigenschaften 1., 2., 3., 5. folgen aus der Regularität von $\underline{K}(\Omega)$ (vgl. Lemma 3.8) .

Zu 4.

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow[p_2]{p_1} \mathcal{B}$ ein U -Kernpaar, d.h. $A \xrightarrow[p_2]{p_1} B$ ist ein Kernpaar in $\underline{Ens}^H$ und somit im wesentlichen eine Äquivalenzrelation $A \equiv B^2$, und da $A = U(\mathcal{A})$, ist $A \in \text{Con}(\mathcal{B})$. Sei

$\mathcal{L} := \mathcal{B}/A$, $e : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}$ der kanonische Homomorphismus.

Falls $\hat{e} : B \longrightarrow C$ ein Coegalisateur von $\langle p_1, p_2 \rangle$ ist ($\hat{e}$ ist wegen Theorem 3.1.3 dann schon eine Retraktion), ist

$A = \ker \hat{e} = \ker e$ und daher existiert eine Bijektion

$g : C \longrightarrow \hat{C}$ mit $\hat{e} = g \cdot e$. Nach Lemma 3.8.3 sei $\hat{\mathcal{L}}$ die von $\mathcal{L}$ mittels g auf $\hat{C}$ transportierte Struktur, also

$g : \mathcal{L} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ ein Homomorphismus und da g ein Isomorphismus ist, ist $\hat{e}$ auch ein Coegalisateur von $\langle p_1, p_2 \rangle$. $\therefore$

3.15 Theorem

Sei $K \subseteq \underline{K}(\Omega)$ eine Gleichungsklasse, dann ist

$U_K : \underline{K} \longrightarrow \underline{Ens}^H$ monadisch.

Beweis:

Nach Theorem 4.21 ist K abgeschlossen gegen homomorphe Bilder, deren U_K -Bilder wegen Theorem 3.1.3 Retrakte sind,

nach Theorem 3.14 ist $\underline{K}(\Omega)$ monadisch; $\underline{K}(\Omega)$ ist eine reguläre Kategorie im Sinne von M69, (Def 1.7), und $UP : \underline{Ens}^H \longrightarrow \underline{Ens}^H$ erhält reguläre Epimorphismen (da sie Retrakte sind) und Monomorphismen (da $X \subseteq Y \rightarrow \text{Pol}(\Omega, X) \subseteq \text{Pol}(\Omega, Y)$), also erhält P reguläre Faktorisierungen. - Nach M69, Prop. 3.6 ist U_K monadisch. $\therefore$:

Zu diesem Theorem gibt es zwei partielle Umkehrungen:
Wenn man fordert, daß K abgeschlossen gegen Subalgebren in $\underline{K}(\Omega)$ ist, folgt aus U_K monadisch, daß K eine Gleichungsklasse von Ω -Algebren ist. - Fordert man dagegen nur, daß U_K gerichtete Limiten erhält, dann folgt aus U_K monadisch, daß K eine finitäre Gleichungsklasse von Ω -Algebren ist, wobei Ω im Beweis konstruiert wird.

3.16 Theorem

Sei $K \subseteq \underline{K}(\Omega)$ abgeschlossen gegen Subalgebren. Falls $U_K : \underline{K} \longrightarrow \underline{Ens}^H$ monadisch, ist K eine Gleichungsklasse.

Beweis:

$\underline{K}$ ist produkt-abgeschlossen, da nach M69, Prop. 2.4, jeder monadische Funktor Limiten erschafft.

Sei $\mathcal{A} \in K$ und $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$, f surjektiv. Dann ist $\ker f \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ eine $\underline{K}$ -Algebra und $\ker f \xrightarrow[p_2]{p_1} \mathcal{A}$ eine Kongruenz, deren U_K -Bild einen retraktiven Coegalisateur in $\underline{Ens}^H$ besitzt (nämlich f).

Nach P71, 3.3 Bedingung 4, erschafft U_K Coegalisatoren von Kongruenzen, deren U_K -Bilder retraktive Coegalisatoren besitzen; somit gibt es eine Ω -Algebra $\hat{\mathcal{L}} \in K$, so daß $f : \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ ein Ω -Homomorphismus ist. Nach Lemma 3.8.3 und 3.8.7 ist $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}}$.

Zum Beweis des fundamentalen Theorems 3.18 benötigen wir folgendes Lemma

3.17 Lemma

Sei $\mathcal{E}$ eine Menge von Gleichungen der Form $\mathcal{E} = \bigcup \langle \mathcal{E}_i \mid i \in I \rangle$, $\mathcal{E}_i \subseteq \text{Gl}(\Omega, X_i)$. Sei $\mathcal{A} \in \underline{K}(\Omega)$.

Äquivalent sind:

(i) $\alpha \models \mathcal{G}$

(ii) Jeder Homomorphismus $f : \text{Pol}(\Omega, X_i) \longrightarrow \alpha$ läßt sich über $e_i : \text{Pol}(\Omega, X_i) \longrightarrow \text{Pol}(\Omega, X_i)/\phi_i$ faktorisieren, wobei ϕ_i die von $\mathcal{G}_i$ erzeugte Kongruenz ist und e_i der kanonische Homomorphismus.

Beweis:

Nach Definition sind für $f : \text{Pol}(\Omega, X_i) \longrightarrow \alpha$ äquivalent:

(a) $\alpha \models_{f \cdot \eta_{\mathbb{P}_X}} "r=s"$ und (b) $f^{w'(r)}(r) = f^{w'(s)}(s)$,

also ist (i) äquivalent damit, daß für alle $i \in I$ und für jeden Homomorphismus

$f : \text{Pol}(\Omega, X_i) \longrightarrow \alpha \quad f^{w'(r)}(r) = f^{w'(s)}(s) .$

(i) $\implies$ (ii)

Da e_i ein Coegalisateur von $\mathcal{G}_i \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} \text{Pol}(\Omega, X_i)$ ist, und

für $f : \text{Pol}(\Omega, X_i) \longrightarrow \alpha \quad f \cdot p_1 = f \cdot p_2$ gilt, muß f über e_i faktorisieren.

(ii) $\implies$ (i)

Wenn f über e_i faktorisiert, gilt für " $r=s$ " $\in \mathcal{G}_i$
 $f^{w'(r)}(r) = f^{w'(s)}(s) .$

3.18 Theorem

Sei $G : \underline{L} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ ein stark finitärer monadischer Funktor. Dann gibt es einen Operatorenbereich Ω über H , eine finitäre Gleichungsklasse $K \subseteq K(\Omega)$ und einen Isomorphismus von Kategorien I , so daß

$$\begin{array}{ccc} \underline{L} & \xrightarrow{I} & \underline{K} \\ & \searrow G & \swarrow U_K \\ & & \underline{\text{Ens}}^H \end{array}$$

kommutiert.

Beweis:

Sei $\Pi = \langle T, \eta, \mu \rangle$ die Monade $\langle GF, \eta, G \in F \rangle$. Da G stark finitär und F als links-adjungierter Funktor beliebige Colimiten erhält, erhält $T = GF$ beliebige gerichtete Limiten. Sei X eine H -unendliche Menge und $\Omega := (TX)^\circ$.

Sei $\omega \in (TX)^h$. Wir setzen $w'(\omega) := h$. Außerdem wählen wir für jedes $\omega \in \Omega$ eine endliche H-Menge $w(\omega) \subseteq X$ und $z_\omega \in Tw(\omega)$ aus, so daß $(T(\text{in}_{w(\omega)}, X))^h(z_\omega) = \omega$. Das ist möglich, da $\langle T(\text{in}_{YX}) : TY \longrightarrow TX \mid Y \subseteq X \wedge Y \text{ endlich} \rangle$ ein gerichteter Limes ist.

Als nächstes definieren wir für jede H-Menge A eine Ω -Algebra $\mathcal{F}A$ über TA : Sei $\omega \in \Omega$, $w'(\omega) = h$, $x \in (TA)^{w(\omega)}$ (also $\omega \in (TX)^h$ und $x : w(\omega) \longrightarrow TA$). Es sei $\omega_{\mathcal{F}A}(x) := (\mu_A \cdot Tx)^h(z_\omega) :$

$$\begin{array}{ccc} z_\omega \in Tw(\omega) & \xrightarrow{Tx} & TTA \\ & \downarrow \mu_A & \\ w(\omega) & \xrightarrow{x} & TA \end{array}$$

Für eine H-Menge A sei $e_A : \text{Pol}(\Omega, A) \longrightarrow \mathcal{F}A$ der kanonische Homomorphismus, der η_A über η_A^P faktorisiert. Für $Y \subseteq X$, Y endlich und $h \in H$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_Y^h &:= \{ "r=s" \mid e_Y^h(r) = e_Y^h(s) \} \text{ und} \\ \mathcal{G} &:= \bigcup \langle \mathcal{G}_Y \mid Y \subseteq X \wedge Y \text{ endlich} \rangle. \\ \text{Sei } K &:= \{ \alpha \in K(\Omega) \mid \alpha \models \mathcal{G} \}. \end{aligned}$$

Die oben definierten Algebren $\mathcal{F}A$ sind freie Algebren über A in K ; $\eta_A : A \longrightarrow TA$ ist dabei die "Einbettung der Variablen". Dazu zeigen wir:

- (a) für $A \in \text{Ens}^H$ ist $\mu_A : \mathcal{F}TA \longrightarrow \mathcal{F}A$ ein Ω -Homomorphismus
- (b) für $f : A \longrightarrow B$ ist $Tf : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{F}B$ ein Ω -Homomorphismus
- (c) für $A \in \text{Ens}^H$ ist $\mathcal{F}A \in K$
- (d) jede Abbildung $f : A \longrightarrow B = U(\mathcal{B})$ läßt sich über η_A durch genau einen Ω -Homomorphismus $\hat{f} : \mathcal{F}A \longrightarrow \mathcal{B}$ faktorisieren.

Zu a):

Sei $\omega \in (TX)^h$ und $x : w(\omega) \longrightarrow TA$ beliebig.

$$\begin{aligned} \mu_A^h(\omega_{\mathcal{F}TA}(x)) &= (\mu_A \cdot \mu_{TA} \cdot Tx)^h(z_\omega) \quad (\text{nach Def. von } \omega_{\mathcal{F}TA} \text{ und 1.16}) \\ &= (\mu_A \cdot T\mu_A \cdot Tx)^h(z_\omega) \quad (\text{Assoziativgesetz der Monade}) \\ &= \omega_{\mathcal{F}A}(\mu_A \cdot x) = \omega_{\mathcal{F}A}(\mu_A^{w(\omega)}(x)) \end{aligned}$$

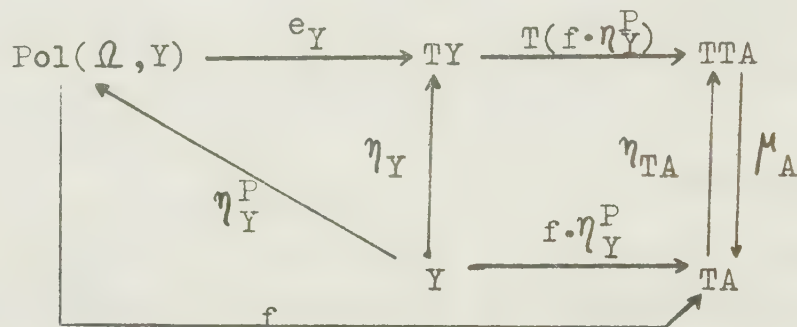
Zu b):

Sei $f : A \longrightarrow B$, $\omega \in (TX)^h$ und $x : w(\omega) \longrightarrow TA$ beliebig.

$$\begin{aligned} Tf^h(\omega_{\mathcal{Y}_A}(x)) &= (Tf \cdot \mu_A \cdot Tx)^h(z_\omega) \\ &= (\mu_B \cdot TTf \cdot Tx)^h(z_\omega) \quad (\text{da } \mu \text{ nat. Transformation}) \\ &= \omega_{\mathcal{Y}_B}(Tf \cdot x) = \omega_{\mathcal{Y}_B}(Tf^{w(\omega)}(x)) . \end{aligned}$$

Zu c):

Wir benutzen Lemma 3.17 . Sei $Y \subseteq X$ beliebig und endlich und $f : \mathcal{P}ol(\Omega, Y) \longrightarrow \mathcal{Y}_A$ ein Ω -Homomorphismus.



$$\begin{aligned} \text{Es ist } f \cdot \eta_Y^P &= \mu_A \cdot \eta_{TA} \cdot (f \cdot \eta_Y^P) \quad (\text{Einheitsgesetz der Monade}) \\ &= \mu_A \cdot T(f \cdot \eta_Y^P) \cdot \eta_Y \\ &= \mu_A \cdot T(f \cdot \eta_Y^P) \cdot e_Y \cdot \eta_Y^P \quad (1) \end{aligned}$$

Nach (a) ist $\mu_A : \mathcal{Y}_{TA} \longrightarrow \mathcal{Y}_A$ ein Ω -Homomorphismus, nach (b) ist $T(f \cdot \eta_Y^P) : \mathcal{Y}_Y \longrightarrow \mathcal{Y}_{TA}$ ein Ω -Homomorphismus und nach Konstruktion ist $e_Y : \mathcal{P}ol(\Omega, Y) \longrightarrow \mathcal{Y}_Y$ ein Ω -Homomorphismus. Somit ist also

$$\mu_A \cdot T(f \cdot \eta_Y^P) \cdot e_Y : \mathcal{P}ol(\Omega, Y) \longrightarrow \mathcal{Y}_A$$

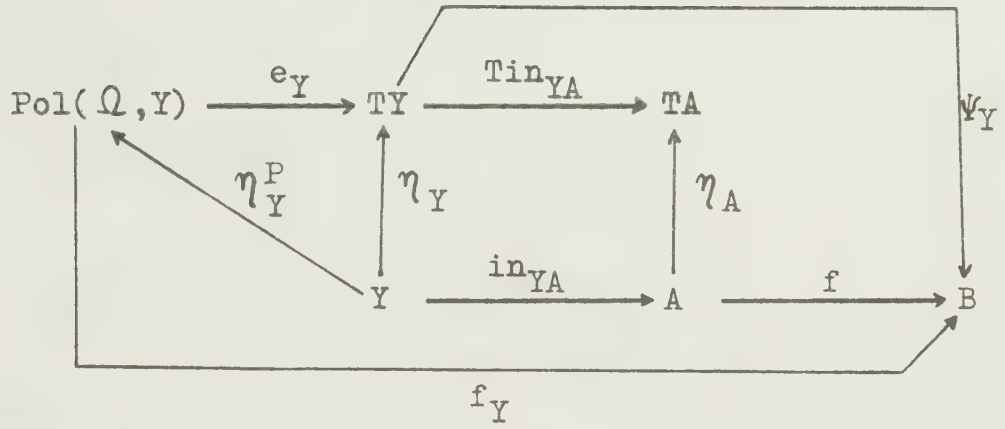
ein Ω -Homomorphismus. Nach A.4.2 folgt aus (1):

$f = \mu_A \cdot T(f \cdot \eta_Y^P) \cdot e_Y$, d.h. f läßt sich über e_Y faktorisieren und daher $\mathcal{Y}_A \in K$.

Zu d):

Sei $f : A \longrightarrow U(\mathcal{L})$ beliebig, $B = U(\mathcal{L})$.

Sei $Y \subseteq A$ eine endliche H-Menge, $f_Y : \mathcal{P}ol(\Omega, Y) \longrightarrow B$ die homomorphe Fortsetzung von $f \cdot \text{in}_{YA}$. Da $\mathcal{L} \in K$, gibt es (genau) einen Ω -Homomorphismus $\psi_Y : \mathcal{Y}_Y \longrightarrow \mathcal{L}$ mit $f_Y = \psi_Y \cdot e_Y$ (siehe Diagramm auf Seite 37 oben).



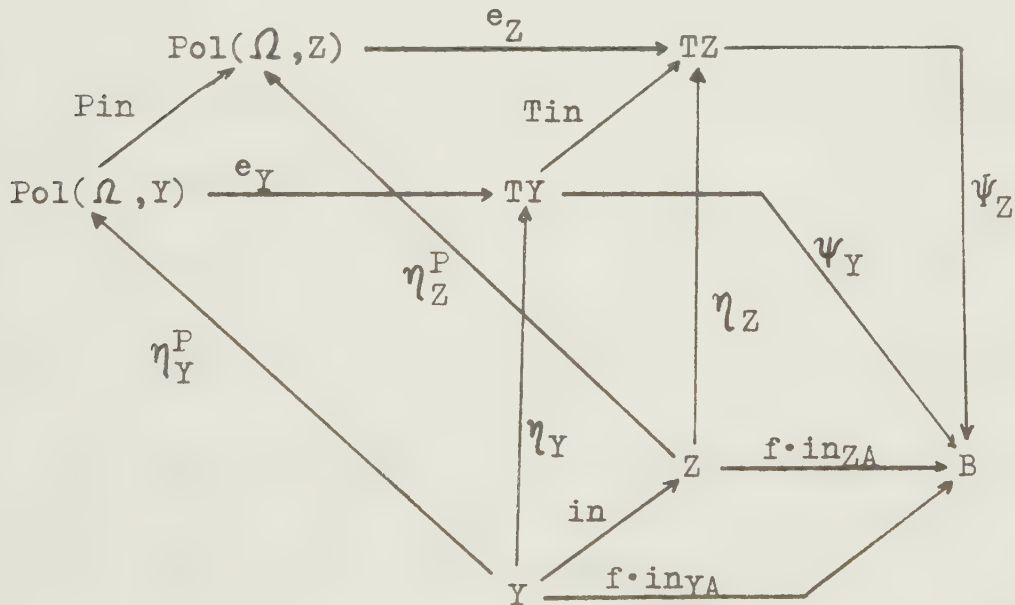
Für $Y \subseteq Z, Z$ endlich, gilt

(2) $\psi_Y = \psi_Z \cdot T(\text{in}_{YZ})$,
wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
 \text{Da } f_Y \cdot \eta_Y^P &= f \cdot \text{in}_{ZA} \cdot \text{in}_{YZ} \\
 &= f_Z \cdot \eta_Z^P \cdot \text{in}_{YZ} \\
 &= f_Z \cdot P(\text{in}_{YZ}) \cdot \eta_Y^P
 \end{aligned}$$

und f_Y und $f_Z \cdot P(\text{in}_{YZ})$ Ω -Homomorphismen sind, gilt also

$$(3) \quad f_Y = f_Z \cdot P(\text{in}_{YZ}).$$



Ebenso folgt

$$\begin{aligned}
 (4) \quad e_Z \cdot P(\text{in}_{YZ}) &= T(\text{in}_{YZ}) \cdot e_Y \\
 \text{da } e_Z \cdot P(\text{in}_{YZ}) \cdot \eta_Y^P &= e_Z \cdot \eta_Z^P \cdot \text{in}_{YZ} = \eta_Z \cdot \text{in}_{YZ} \\
 &= T(\text{in}_{YZ}) \cdot \eta_Y = T(\text{in}_{YZ}) \cdot e_Y \cdot \eta_Y^P
 \end{aligned}$$

Also ist $\psi_Y \cdot e_Y = f_Y$

$$= f_Z \cdot P(\text{in}_{YZ}) \quad (\text{wegen (3)})$$

$$= \psi_Z \cdot e_Z \cdot P(\text{in}_{YZ})$$

$$= \psi_Z \cdot T(\text{in}_{YZ}) \cdot e_Y \quad (\text{wegen (4)})$$

und da e_Y ein Epimorphismus ist, folgt (2).

Wegen (2) und da $\langle T(\text{in}_{YA}) : TY \longrightarrow TA \mid Y \subseteq A, \text{ endlich} \rangle$ ein gerichteter Limes von $\langle T(\text{in}_{YZ}) : TY \longrightarrow TZ \mid Y \subseteq Z \subseteq A \wedge Z \text{ endlich} \rangle$ ist, gibt es genau eine H-Abbildung $\psi : TA \longrightarrow B$, die für alle endlichen $Y \subseteq A$ $\psi_Y = \psi \cdot T(\text{in}_{YA})$ erfüllt. - Jeder Ω -Homomorphismus φ , für den $f = \varphi \cdot \eta_A$ gilt, erfüllt für $Y \subseteq A$

$$\begin{aligned} \psi_Y \cdot e_Y \cdot \eta_Y^P &= f_Y \cdot \eta_Y^P = f \cdot \text{in}_{YA} = \varphi \cdot \eta_A \cdot \text{in}_{YA} \\ &= \varphi \cdot T(\text{in}_{YA}) \cdot \eta_Y = \varphi \cdot T(\text{in}_{YA}) \cdot e_Y \cdot \eta_Y^P, \end{aligned}$$

also $\psi_Y = \varphi \cdot T(\text{in}_{YA})$. Daher kann also höchstens die H-Abbildung ψ eine homomorphe Fortsetzung von f sein.

$$\begin{aligned} \text{Für alle endlichen } Y \subseteq A \text{ ist } f \cdot \text{in}_{YA} &= f_Y \cdot \eta_Y^P \\ &= \psi_Y \cdot e_Y \cdot \eta_Y^P \\ &= \psi_Y \cdot \eta_Y \\ &= \psi \cdot T(\text{in}_{YA}) \cdot \eta_Y \\ &= \psi \cdot \eta_A \cdot \text{in}_{YA} \end{aligned}$$

und da $\langle \text{in}_{YA} : Y \longrightarrow A \rangle$ eine Epi-Senke ist, gilt also $f = \psi \cdot \eta_A$.

Es bleibt zu zeigen, daß ψ ein Ω -Homomorphismus ist.

Sei $\omega \in (TX)^h$ und $x : w(\omega) \longrightarrow TA$. Da $w(\omega)$ finitär ist, gibt es eine endliche H-Menge $Y \subseteq A$ und $g : w(\omega) \longrightarrow TY$, so daß

$$T(\text{in}_{YA})^h(g) = T(\text{in}_{YA}) \cdot g = x.$$

$$\begin{array}{ccccc} Tw(\omega) & \xrightarrow{Tg} & TTY & \xrightarrow{TT(\text{in}_{YA})} & TTA \\ & & \downarrow \mu_Y & & \downarrow \mu_A \\ w(\omega) & \xrightarrow{g} & TY & \xrightarrow{T(\text{in}_{YA})} & TA \xrightarrow{\psi} B \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Es ist } \psi^h(\omega_{\tau_A}(x)) &= (\psi \cdot \mu_A \cdot T x)^h(z_\omega) \\
 &= (\psi \cdot \mu_A \cdot T T(\text{in}_{Y_A}) \cdot T g)^h(z_\omega) \\
 &= (\psi \cdot T(\text{in}_{Y_A}) \cdot \mu_Y \cdot T g)^h(z_\omega) \\
 &= (\psi_Y \cdot \mu_Y \cdot T g)^h(z_\omega) \\
 &= \psi_Y^h(\omega_{\tau_Y}(g)) \\
 &= \omega_{\mathcal{L}}(\psi_Y^{w(\omega)}(g)) \\
 &= \omega_{\mathcal{L}}(\psi_Y \cdot g) \\
 &= \omega_{\mathcal{L}}(\psi \cdot T(\text{in}_{Y_A}) \cdot g) \\
 &= \omega_{\mathcal{L}}(\psi \cdot x) = \omega_{\mathcal{L}}(\psi^{w(\omega)}(x)) \quad .
 \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also gezeigt:

- (1) Der Funktor UoF_K ist gleich T .
- (2) Die "Einbettung der Variablen in UoF_K " ist η .
- (3) $\text{U} \in \text{F}_K$ ist μ .

Somit erzeugt die Klasse K durch ihre Adjunktion $\langle \text{F}_K, \text{U}, \eta, \epsilon \rangle$ gerade die Monade $\langle T, \eta, \mu \rangle$. Da nach Theorem 3.15 U_K monadisch ist, sind somit $\underline{K}$ und $\underline{L}$ konkret isomorphe Kategorien. :/:

§ 4 Syntaktische und semantische Beschreibung

von Klassen von Ω -Algebren

In diesem Paragraphen werden zum Abschluß semantische Beschreibungen von Quasigleichungsklassen, finitären Quasigleichungsklassen, Gleichungsklassen und finitären Gleichungsklassen gegeben. Es stellt sich heraus, daß für finitäre Quasigleichungsklassen und für Gleichungsklassen die bekannten semantischen Beschreibungen, die man für die homogene Algebra kennt, übertragbar sind - dagegen sehen die semantischen Charakterisierungen für Quasigleichungsklassen und für finitäre Gleichungsklassen ungewohnter aus.

Zum Anfang zeigen wir, wie sich bestimmte Klassen von Formeln unter den Konstruktionen der homomorphen Bilder, Subalgebren, Produkte und gerichteten Limiten verhalten. Im Anschluß daran beweisen wir die semantischen Charakterisierungen der o. g. Klassen.

4.1 Lemma

Sei $"r=s" \in \text{Gl}^h(\Omega, X)$

1. Sei $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus,
 $g : X \longrightarrow A$ eine H-Abbildung. Falls $\mathcal{A} \models_g "r=s"$,
dann gilt auch $\mathcal{B} \models_{f \cdot g} "r=s"$.
2. Sei $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Monomorphismus, $g : X \longrightarrow A$
eine H-Abbildung. Es gilt $\mathcal{B} \models_{f \cdot g} "r=s"$ genau dann,
wenn $\mathcal{A} \models_g "r=s"$ gilt.
3. Sei $\langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ eine Familie von Ω -Algebren,
 $g : X \longrightarrow \prod A_i$ eine H-Abbildung. Es gilt
 $\prod \mathcal{A}_i \models_g "r=s"$ genau dann, wenn für alle $i \in I$
 $\mathcal{A}_i \models_{\text{pr}_i \cdot g} "r=s"$.

Beweis:

1. Wenn $\mathcal{A} \models_g "r=s"$, dann ist $\overline{g}_{\mathcal{A}}^h(r) = \overline{g}_{\mathcal{A}}^h(s)$. Da
 $(f \cdot g)_{\mathcal{B}} = f \cdot \overline{g}_{\mathcal{A}}$, falls $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus ist, folgt hieraus $\mathcal{B} \models_{f \cdot g} "r=s"$.

2. Wenn $\mathcal{L} \models_{f \cdot g} "r=s"$, dann ist $(f \cdot \bar{g}_\alpha)^h(r) = (f \cdot \bar{g}_\alpha)^h(s)$
 und da f ein Monomorphismus, $\bar{g}_\alpha^h(r) = \bar{g}_\alpha^h(s)$, also
 $\mathcal{A} \models_g "r=s"$. Die Umkehrung folgt aus 1.
3. Sei $g : X \longrightarrow \prod A_i$, $g = \langle g_i \mid i \in I \rangle$. Nach Definition
 ist $\prod \mathcal{A}_i \models_g "r=s"$ damit äquivalent, daß
 $r_{\prod \mathcal{A}_i}(g) = s_{\prod \mathcal{A}_i}(g)$. Nach 2.21 ist $r_{\prod \mathcal{A}_i}(g) = \langle r_{\mathcal{A}_i}(g_i) \mid i \in I \rangle$,
 dasselbe gilt für s , also gilt $\prod \mathcal{A}_i \models_g "r=s"$ genau dann,
 wenn $\langle r_{\mathcal{A}_i}(g_i) \mid i \in I \rangle = \langle s_{\mathcal{A}_i}(g_i) \mid i \in I \rangle$ gilt, und das
 gilt genau dann, wenn es komponentenweise gilt. $\therefore$

Hieraus kann man folgendes wichtige Theorem beweisen:

4.2 Theorem

Sei $b \in \text{Univ}(\Omega, X)$ eine Formel,

$$b = "b(r_1=s_1, \dots, r_n=s_n)"$$

1. Falls $b_2 : 2^n \longrightarrow 2$ monoton ist und $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$
 ein Homomorphismus, folgt für alle $g : X \longrightarrow A$
 $\mathcal{A} \models_g b \implies \mathcal{L} \models_{f \cdot g} b$.
 Falls f surjektiv ist, folgt aus $\mathcal{A} \models b$ $\mathcal{L} \models b$.
2. Falls $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$ monomorph ist, folgt für alle
 $g : X \longrightarrow A$ $\mathcal{L} \models_{f \cdot g} b \iff \mathcal{A} \models_g b$. Insbesondere
 impliziert $\mathcal{L} \models b$ $\mathcal{A} \models b$.
3. Falls b eine Quasigleichung ist, $g : X \longrightarrow \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$
 und für alle $i \in I$ gilt $\mathcal{A}_i \models_{pr_i \cdot g} b$, dann gilt
 $\prod \mathcal{A}_i \models_g b$.
 Insbesondere gilt $\prod \mathcal{A}_i \models b$, falls für alle $i \in I$ $\mathcal{A}_i \models b$.

Beweis:

1. Es gelte $\mathcal{A} \models_g b$, also

$$b_2([\mathcal{A} \models_g "r_1=s_1"], \dots, [\mathcal{A} \models_g "r_n=s_n"]) = 1. \quad \text{Nach Thm.}$$

4.1.1 gilt für $i = 1, \dots, n$ $[\mathcal{A} \models_g "r_i=s_i"] \leq [\mathcal{L} \models_{f \cdot g} "r_i=s_i"]$
 und damit folgt die Behauptung.

Es gelte $\mathcal{A} \models b$. Sei $m : B \longrightarrow A$ ein Schnitt zu f ,
 d.h. $f \cdot m = 1_B$; sei $g : X \longrightarrow B$ beliebig. Es ist also
 $m \cdot g : X \longrightarrow A$ und $f \cdot (m \cdot g) = g$. Nach Voraussetzung ist
 $\mathcal{A} \models_{m \cdot g} b$ und nach obigem $\mathcal{L} \models_g b$. Da g beliebig ge-
 wählt war, folgt die Behauptung.

2. Nach 4.1.2 gilt für jede Gleichung " $r=s$ " $[a \models_g "r=s"] = [z \models_{f \cdot g} "r=s"]$, damit folgt unmittelbar die erste Aussage. Es gelte $z \models b$. Da für beliebiges $g : X \longrightarrow A$ gilt $a \models_g b \iff z \models_{f \cdot g} b$, folgt hieraus sofort $a \models b$.
3. Für alle $i \in I$ gelte $a_i \models_{pr_i \cdot g} b$. Falls für die Prämissen " $r_i=s_i$ " von b gilt $\prod a_i \models_g "r_i=s_i"$, dann gilt für die Prämissen wegen 4.1.3 für alle $i \in I$, $a_i \models_{pr_i \cdot g} "r_i=s_i"$; also gilt für alle $i \in I$ für die Konklusion " $r_n=s_n$ " $a_i \models_{pr_i \cdot g} "r_n=s_n"$ und somit ebenfalls wegen 4.1.3 $\prod a_i \models_g "r_n=s_n"$. Die zweite Aussage folgt hieraus offensichtlich. :/:

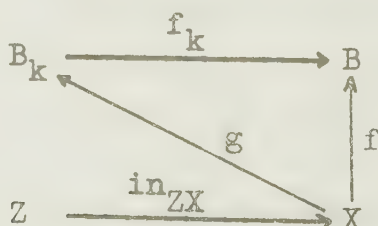
Bemerkung: Die monotonen Polynome in 4.2.1 sind genau die Polynome, die man mit Hilfe der Operationen $\wedge$ und $\vee$ ausdrücken kann - von den beiden konstanten Polynomen abgesehen.

Als nächstes werden wir das Verhalten von universellen Formeln unter gerichteten Limiten betrachten. Wir zeigen als erstes, daß unter einer gewissen Zusatzbedingung die Gültigkeit von Formeln unter gerichteten Limiten erhalten bleibt. Diese Zusatzbedingung ist immer erfüllt, wenn H endlich ist - für den allgemeinen Fall haben wir zwei wichtige hinreichende Bedingungen für diese Zusatzbedingung.

4.3 Definition

Sei $S = \langle f_i : B_i \longrightarrow B \mid i \in I \rangle$ ein gerichteter Limes von H -Mengen und sei X eine H -Menge. X heißt lokal fortsetzbar in S , wenn für jede endliche Teilmenge $Z \subseteq X$ und jede H -Abbildung $f : X \longrightarrow B$ eine H -Abbildung $g : X \longrightarrow B_k$ für ein $k \in I$ existiert, so daß

$$f_k \cdot g \cdot \text{in}_{ZX} = f \cdot \text{in}_{ZX}.$$



4.4 Sei H endlich und $S = \langle f_i : B_i \longrightarrow B \mid i \in I \rangle$ ein gerichteter Limes von H -Mengen und X eine H -Menge. X ist lokal fortsetzbar in S .

Beweis:

Wir betrachten zuerst den Fall, daß $\text{card } H = 1$, also die Kategorie Ens. Seien $f : X \longrightarrow B$ und $Z \subseteq X$, Z endlich, beliebig. Da Z finitär ist, gibt es $\hat{g} : Z \longrightarrow B_k$ für ein $k \in I$ mit $f_k \cdot \hat{g} = f \cdot \text{in}_{ZX}$. Falls $Z \neq \emptyset$, gibt es $r : X \longrightarrow Z$ mit $r \cdot \text{in}_{ZX} = 1_Z$, somit gilt also mit $g := \hat{g} \cdot r$

$$f_k \cdot g \cdot \text{in}_{ZX} = f_k \cdot \hat{g} \cdot r \cdot \text{in}_{ZX} = f_k \cdot \hat{g} = f \cdot \text{in}_{ZX}.$$

Falls $Z = \emptyset$ und $X = \emptyset$, gilt dasselbe Argument.

Sei $Z = \emptyset$ und $X \neq \emptyset$, dann ist also $B \neq \emptyset$ und es gibt $k \in I$ mit $B_k \neq \emptyset$. Sei $g : X \longrightarrow B_k$ beliebig, es ist $f_k \cdot g \cdot \text{in}_{ZX} = f \cdot \text{in}_{ZX}$, da Z initiales Objekt ist.

Jetzt zum Fall, daß $\text{card } H > 1$. Für jedes $h \in H$ sei $f^h \cdot \text{in}_{ZX}^h = f_{k_h}^h \cdot g_h^h \cdot \text{in}_{ZX}^h$ und da H endlich, gibt es ein $k \in I$ mit $k \geq k_h$ für $h \in H$. Sei g durch $g^h := f_{k_h}^h \cdot g_h^h$ definiert. Es gilt also für alle $h \in H$

$$f^h \cdot \text{in}_{ZX}^h = f_k^h \cdot f_{k_h}^h \cdot g^h \cdot \text{in}_{ZX}^h = f_k^h \cdot g^h \cdot \text{in}_{ZX}^h, \text{ somit also}$$

$$f \cdot \text{in}_{ZX} = f_k \cdot g \cdot \text{in}_{ZX}. \quad \quad \quad :/:$$

4.5 Sei $S = \langle f_i : B_i \longrightarrow B \mid i \in I \rangle$ ein gerichteter Limes und X eine endliche H -Menge. X ist lokal fortsetzbar in S .

Beweis: da X finitär ist :/:

4.6 Definition

Sei $S = \langle f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j \mid i \leq j \in I \rangle$ eine gerichtete Familie. S heißt regulär gerichtet, wenn für $i \leq j \in I$ f_{ij} ein regulärer Epimorphismus ist. Ein gerichteter Limes einer regulär gerichteten Familie heißt regulär gerichteter Limes.

4.7 Sei $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \mid i \in I \rangle$ ein regulär gerichteter Limes in $\underline{\text{Ens}}^H$. Dann ist für $i \in I$ f_i ein regulärer Epimorphismus.

Beweis:

Sei $i \in I$ beliebig; da $I_i := \{j \in I \mid j \geq i\}$ cofinal in I ist, ist $\langle f_j : A_j \longrightarrow A \mid j \in I_i \rangle$ ein gerichteter Limes.

Seien $g_1, g_2 : A \longrightarrow \cdot$ beliebig mit $g_1 \cdot f_i = g_2 \cdot f_i$.

Wegen $f_i = f_j \cdot f_{ij}$ und da f_{ij} epimorph ist, folgt daraus $g_1 f_j = g_2 f_j$ für alle $j \in I_i$ und da ein gerichteter Limes eine Epi-Senke ist, folgt $g_1 = g_2$, d.h. f_i ist epimorph und somit regulär epimorph. $://$

4.8 Sei $S = \langle f_i : A_i \longrightarrow A \mid i \in I \rangle$ ein regulär gerichteter Limes in $\underline{\text{Ens}}^H$ und $X \in \underline{\text{Ens}}^H$. Dann ist X lokal fortsetzbar in S .

Beweis:

Sei $i \in I$ beliebig und $m : A \longrightarrow A_i$ ein Schnitt zu f_i ,

also $f_i \cdot m = 1_A$. Für $\varphi : X \longrightarrow A$ ist also

$f_i \cdot (m \cdot \varphi) \cdot \text{in}_{ZX} = \varphi \cdot \text{in}_{ZX}$ für beliebiges $Z \subseteq X$. $://$

4.9 Lemma

Sei $S = \langle f_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A} \mid i \in I \rangle$ ein gerichteter Limes von Ω -Algebren, X sei lokal fortsetzbar in S . Sei

$b \in \text{Univ}(\Omega, X)$ eine Formel. Falls für alle $i \in I$ $\mathcal{A}_i \models b$, dann gilt auch $\mathcal{A} \models b$.

Beweis:

Sei $Z \subseteq X$ die (endliche) H-Menge der Variablen, die in b vorkommen, und sei $\varphi : X \longrightarrow A$ eine beliebige Belegung der Variablen. Nach Voraussetzung gibt es $j \in I$ und $g : X \longrightarrow A_j$, so daß $f_j \cdot g \cdot \text{in}_{ZX} = \varphi \cdot \text{in}_{ZX}$. Also gilt auch für die jeweiligen homomorphen Fortsetzungen:

$$f_j \cdot \bar{g}_{\mathcal{A}_j} \cdot P(\text{in}_{ZX}) = \bar{\varphi}_{\mathcal{A}} \cdot P(\text{in}_{ZX}).$$

Wenn $\mathcal{A} \models "r=s"$ für eine atomare Formel von b gilt, d.h.

$\bar{\varphi}_{\mathcal{A}}^h(r) = \bar{\varphi}_{\mathcal{A}}^h(s)$, dann gilt wegen $r, s \in \text{Pol}^h(\Omega, Z)$

$(f_j \cdot \bar{g}_{a_j} \cdot P(\text{in}_{ZX}))^h(r) = (f_j \cdot \bar{g}_{a_j} \cdot P(\text{in}_{ZX}))^h(s)$, und da UoS ein gerichteter Limes ist und Z stark finitär, gibt es ein $k \in I$ und $(f_{jk} \cdot \bar{g}_{a_j} \cdot P(\text{in}_{ZX}))^h(r) = (f_{jk} \cdot \bar{g}_{a_j} \cdot P(\text{in}_{ZX}))^h(s)$, d.h. $a_k \models_{f_{jk} \cdot g} "r=s"$. Wegen Lemma 4.1.1 gilt auch für $\hat{k} \geq k$ $a_{\hat{k}} \models_{f_{j\hat{k}} \cdot g} "r=s"$. Es gibt also ein $\hat{k} \in I$, das für alle atomaren Formeln von b , für die $a \models_{\varphi} "r=s"$ gilt, auch

$a_{\hat{k}} \models_{f_{j\hat{k}} \cdot g} "r=s"$ erfüllt. Für die atomaren Formeln, für die nicht gilt $a \models_{\varphi} "r=s"$, gilt wegen 4.1.1 auch nicht

$$a_{\hat{k}} \models_{f_{j\hat{k}} \cdot g} "r=s" .$$

Somit gilt für alle atomaren Formeln $"r=s"$ von b

$$[a \models_{\varphi} "r=s"] = [a_{\hat{k}} \models_{f_{j\hat{k}} \cdot g} "r=s"] . \text{ Daher gilt auch}$$

$$[a \models_{\varphi} b] = [a_{\hat{k}} \models_{f_{j\hat{k}} \cdot g} b] = 1 , \text{ also } a \models_{\varphi} b .$$

Da φ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $://$

4.10 Corollar

1. Sei H endlich und $K \subseteq K(\Omega)$ eine universell axiomatische Klasse. K ist abgeschlossen gegen gerichtete Limiten.
2. Sei $K \subseteq K(\Omega)$ eine finitäre universell axiomatische Klasse. K ist abgeschlossen gegen gerichtete Limiten.
3. Sei $K \subseteq K(\Omega)$ eine universell axiomatische Klasse. K ist abgeschlossen gegen regulär gerichtete Limiten.

4.11 Corollar

Sei $\mathcal{A}$ ein gerichteter Limes der Ω -Algebren $\mathcal{A}_i$ und sei $b \in \text{Univ}(\Omega, X)$ eine Formel. Sei b in $\mathcal{A}$ erfüllbar, d.h. es gibt $g : X \longrightarrow A$ und $\mathcal{A} \models_g b$.

1. Falls H endlich ist, gibt es einen Index i , so daß b in $\mathcal{A}_i$ erfüllbar ist.
2. Falls X endlich ist, gibt es einen Index i , so daß b in $\mathcal{A}_i$ erfüllbar ist.
3. Falls der gerichtete Limes regulär ist, gibt es einen Index i , so daß b in $\mathcal{A}_i$ erfüllbar ist.

Beweis:

Wenn b in keinem $\mathcal{A}_i$ erfüllbar ist, gilt $\mathcal{A}_i \models \neg b$ für alle i , nach 4.10 also auch $\mathcal{A} \models \neg b$. ://

Als nächstes geben wir verschiedene semantische Charakterisierungen von Quasigleichungsklassen. Folgende Begriffe werden eine Rolle spielen:

4.12 Definition

1. Sei I eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{P}I$. Sei $\langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ eine Familie von Ω -Algebren. Das filtrierte Produkt dieser Familie nach $\mathcal{F}$ - in Zeichen $\prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle / \mathcal{F}$ oder kurz $\prod \mathcal{A}_i / \mathcal{F}$ - ist der gerichtete Limes von

$$\langle \text{pr}_{JL} : \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in J \rangle \longrightarrow \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in L \rangle \mid J \supseteq L \in \mathcal{F} \rangle,$$

wobei pr_{JL} die von den Produkten induzierten Projektionen sind.

2. Falls $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, nennt man $\prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle / \mathcal{F}$ ein Ultraprodukt.
3. $\prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle / \mathcal{F}$ heißt regulär filtriertes Produkt (bzw. reguläres Ultraprodukt), wenn für alle $i, j \in I$

$$A_i^h = \emptyset \iff A_j^h = \emptyset \quad \text{für alle } h \in H.$$

Bei regulär filtrierten Produkten ist die gerichtete Familie

$$\langle \text{pr}_{JL} : \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in J \rangle \longrightarrow \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in L \rangle \mid J \supseteq L \in \mathcal{F} \rangle \text{ regulär.}$$

Bei der mengentheoretischen Definition von filtrierten Produkten (z.B. "filtered product" in M73, 8.2 ; oder "reduced product" in G68, Def.22.4) konstruiert man regulär filtrierte Produkte, was aber wegen der Sonderrolle der leeren Menge keine praktischen Unterschiede zu beliebigen filtrierten Produkten hat.

Im Zusammenhang mit filtrierten Produkten bezeichnen wir für $J \in \mathcal{F}$ mit $\text{pr}_J : \mathcal{A}_J \longrightarrow \mathcal{A}$ die zum Colimes gehörenden Morphismen. Insbesondere ist $\text{pr}_I : \mathcal{A}_I \longrightarrow \mathcal{A}$. Falls

$\prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle / \mathcal{F}$ regulär ist, ist pr_I ein regulärer Epimorphismus.

Außerdem benötigen wir noch eine "halbsyntaktische" Eigenschaft von Klassen von Ω -Algebren.

4.13 Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine Ω -Algebra, $K \subseteq K(\Omega)$. $\text{Diag}_=(\mathcal{A})$ ist die Menge aller Formeln $b \in \text{Univ}(\Omega, A)$, die die Form $b = "\omega a_1 \dots a_n = a_0"$ haben und für die gilt $\omega_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = a_0$. $\text{Diag}_+(\mathcal{A})$ ist die Menge der Formeln $b \in \text{Univ}(\Omega, A)$, die die Form $b = "\neg a_0 = a_1"$ haben und für die gilt $a_0 \neq a_1$.

Das Diagramm von $\mathcal{A}$ ist die Menge $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \text{Diag}_=(\mathcal{A}) \cup \text{Diag}_+(\mathcal{A})$. Für $b \in \text{Diag}(\mathcal{A})$ gilt also $\mathcal{A} \models_1 b$.

$\mathcal{A} \in K(\Omega)$ heißt lokal in K, falls jede endliche Teilmenge $A \subseteq \text{Diag}(\mathcal{A})$ in K erfüllbar ist, d.h. es gibt $\mathcal{B} \in K$ und $\varphi: A \longrightarrow B$, so daß $\mathcal{B} \models_{\varphi} A$.

$\mathcal{A} \in K(\Omega)$ heißt finitär lokal in K, falls jede endliche Teilmenge $A \subseteq \text{Diag}(\mathcal{A})$ in K finitär erfüllbar ist, d.h. es gibt $X \subseteq A$, $\mathcal{B} \in K$ und $\varphi: X \longrightarrow B$, so daß $A \subseteq \text{Univ}(\Omega, X)$ und $\mathcal{B} \models_{\varphi} A$.

Um die Abgeschlossenheit gegen gewisse Konstruktionen besser beschreiben zu können, führen wir Operatoren auf Klassen von Ω -Algebren ein. Sei $K \subseteq K(\Omega)$.

$$Q K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \exists \mathcal{B} \in K \text{ und einen regulären Epimorphismus } r: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \}$$

$$S K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \exists \mathcal{B} \in K \text{ und einen Monomorphismus } m: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \}$$

$$P K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \cong \prod \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i \in K \}$$

$$\overset{P}{\rightarrow} K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist filtrierte Produkt von K-Algebren} \}$$

$$\overset{P}{\Rightarrow} K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist regulär filtrierte Produkt von K-Algebren} \}$$

$$\overset{U}{\rightarrow} K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist Ultraprodukt von K-Algebren} \}$$

$$\overset{U}{\Rightarrow} K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist reguläres Ultraprodukt von K-Algebren} \}$$

$\underline{\text{Lim}} := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist gerichteter Limes von } K\text{-Algebren} \}$

$\underline{\underline{\text{Lim}}} := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist regulär gerichteter Limes von } K\text{-Algebren} \}$

$L K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist lokal in } K \}$

$L_f K := \{ \mathcal{A} \in K(\Omega) \mid \mathcal{A} \text{ ist finitär lokal in } K \}$

Im nächsten Lemma werden einige Verknüpfungen dieser Operatoren zusammengefaßt, deren Beweise im Anhang B aufgeführt sind.

4.14 Lemma

Sei $K \subseteq K(\Omega)$ eine Klasse von Ω -Algebren.

1. Für alle auf den Seiten 47 und 48 eingeführten Operatoren X gilt $K \subseteq X K$ und $K \subseteq K' \rightarrow X K \subseteq X K'$.
2. Für $X = Q, S, P, \underline{P}, \underline{\underline{P}}, \underline{\underline{P}}, \underline{\underline{P}}, L, L_f$ gilt $X X K \subseteq X K$

Die Operatoren sind also - bis auf $\underline{\text{Lim}}$ und $\underline{\underline{\text{Lim}}}$ - Hüllenoperatoren.

$$3. \quad \begin{array}{c} \underline{\underline{P}} K \\ \underline{\underline{P}} K \\ \underline{\underline{P}} K \end{array} \begin{array}{c} \subseteq \\ \subseteq \\ \subseteq \end{array} \begin{array}{c} \underline{P} K \\ \underline{P} K \\ P K \end{array} \begin{array}{c} \subseteq \\ \subseteq \\ \subseteq \end{array} \underline{P} K, \quad \underline{\underline{\text{Lim}}} K \subseteq \underline{\text{Lim}} K$$

4. Falls H endlich ist, gilt $\underline{P} K \subseteq \underline{P} S K$
5. $\underline{\underline{\text{Lim}}} K \subseteq Q K$
6. $\underline{P} K \subseteq \underline{\text{Lim}} P K, \quad \underline{P} K \subseteq \underline{\underline{\text{Lim}}} P K$
7. $S Q K \subseteq Q S K$
8. $P S K \subseteq S P K, \quad \underline{P} S K \subseteq S \underline{P} K, \quad \underline{\underline{P}} S \underline{\underline{P}} K \subseteq S \underline{\underline{P}} S K$
9. $P Q K \subseteq Q P K, \quad \underline{P} Q K \subseteq Q \underline{P} K, \quad \underline{\underline{P}} Q K \subseteq Q \underline{\underline{P}} K$
10. $S \underline{\text{Lim}} K \subseteq \underline{\text{Lim}} S K, \quad S \underline{\underline{\text{Lim}}} K \subseteq \underline{\underline{\text{Lim}}} S K$
11. $S K \subseteq L K \subseteq L_f K$
12. $P L_f K \subseteq L_f P K, \quad P L K \subseteq L P K$

Als nächstes werden wir untersuchen, wie sich die Gültigkeit von Formeln unter Ultraprodukten verhält. Wesentlich ist die heterogene Version des Theorems von Łoś (vgl. z.B. G68, Thm. 1 in § 39).

4.15 Lemma

Sei " $r=s$ " $\in \text{Gl}^h(\Omega, X)$, für $i \in I$ sei $\alpha_i \in K(\Omega)$ und sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{P}I$; sei $f : X \longrightarrow \prod A_i$.

(I) und (II) seien folgende Bedingungen:

$$(I) \quad \{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i \cdot f} "r=s" \} \in \mathcal{F}$$

$$(II) \quad \prod \alpha_i / \mathcal{F} \models_{\text{pr}_I \cdot f} "r=s"$$

1. (I) impliziert (II).

2. Falls $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, impliziert (II) (I)

Beweis:

1. Sei $J := \{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i \cdot f} "r=s" \}$. Nach 4.1.3 gilt dann

$$\prod \langle \alpha_i \mid i \in J \rangle \models_{\text{pr}_{IJ} \cdot f} "r=s".$$

Wegen 4.1.1 und $\text{pr}_I \cdot f = \text{pr}_J \cdot \text{pr}_{IJ} \cdot f$ folgt (II)

2. Sei (I) falsch und J wie in 1. definiert. Es ist also $J \notin \mathcal{F}$, und da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, ist $J^c \in \mathcal{F}$.

Für alle $G \in \mathcal{F}$ ist also $G \cap J^c \neq \emptyset$, d.h. G enthält ein i , das $\alpha_i \models_{\text{pr}_i \cdot f} "r=s"$ nicht erfüllt. Somit ist

für alle $G \in \mathcal{F}$ $\prod \langle \alpha_i \mid i \in G \rangle \models_{\text{pr}_{IG} \cdot f} "r=s"$ falsch, d.h.

$(\text{pr}_{IG} \cdot \tilde{f})^h(r) \neq (\text{pr}_{IG} \cdot \tilde{f})^h(s)$. Da $U : \underline{K}(\Omega) \longrightarrow \underline{\text{Ens}}^H$ und

$V_h : \underline{\text{Ens}}^H \longrightarrow \text{Ens} : A \longmapsto A^h : f \longmapsto f^h$ gerichtete Li-

miten erhalten, ist wegen A.8.2 $(\text{pr}_I \cdot \tilde{f})^h(r) \neq (\text{pr}_I \cdot \tilde{f})^h(s)$,

d.h. $\prod \alpha_i / \mathcal{F} \models_{\text{pr}_I \cdot f} "r=s"$ ist falsch. :/:

4.16 Theorem von Łoś

Sei $\prod \langle \alpha_i \mid i \in I \rangle / \mathcal{F}$ ein Ultraprodukt, $f : X \longrightarrow \prod A_i$.

Sei $b \in \text{Univ}(\Omega, X)$. Äquivalent sind:

$$(i) \quad \{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i \cdot f} b \} \in \mathcal{F}$$

$$(ii) \quad \prod \alpha_i / \mathcal{F} \models_{\text{pr}_I \cdot f} b$$

Beweis:

Sei $b = "b(r_1=s_1, \dots, r_n=s_n)"$, sei b_p das entsprechende Boolesche Polynom der Booleschen Algebra $\mathcal{P}I$ und b_2 das von b induzierte Boolesche Polynom der Booleschen Algebra 2 (vgl. 2.17).

Durch $f : \mathcal{P}I \longrightarrow 2$, $f(G) = 1 : \Longleftrightarrow G \in \mathcal{F}$, ist ein Boolescher Homomorphismus gegeben. Unter Berücksichtigung von 4.15 ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} & f(\{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i} \cdot f \ \ell\}) \\ &= f(\{i \mid b_2([\alpha_i \models_{\text{pr}_i} \cdot f "r_1=s_1"], \dots, [\alpha_i \models_{\text{pr}_i} \cdot f "r_n=s_n"]) = 1\}) \\ &= f(b_p(\{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i} \cdot f "r_1=s_1" \}, \dots, \{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i} \cdot f "r_n=s_n" \})) \\ &= b_2(f(\{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i} \cdot f "r_1=s_1" \}), \dots, f(\{i \mid \alpha_i \models_{\text{pr}_i} \cdot f "r_n=s_n" \})) \\ &= b_2([\prod \alpha_i / \mathcal{F} \models_{\text{pr}_I} \cdot f "r_1=s_1"], \dots, [\prod \alpha_i / \mathcal{F} \models_{\text{pr}_I} \cdot f "r_n=s_n"]) \\ &= [\prod \alpha_i / \mathcal{F} \models_{\text{pr}_I} \cdot f \ \ell] . \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

:/:

Als nächstes zeigen wir verschiedene Charakterisierungen von Quasigleichungsklassen. Die Bedingungen (iii), (iv) und (v) finden sich für den homogenen Fall (für algebraische Strukturen, d.h. Relationen sind zugelassen neben den Funktionen) in M73, 11.1 Thm. 1, Thm. 2, Cor. 3. Der Mal'cevsche Begriff von "lokal" ist im wesentlichen mit unserem identisch, während der Cohn'sche Begriff von Lokalität in C65 im wesentlichen gerichtete Vereinigungen benutzt.

4.17 Theorem

Sei $K \subseteq K(\mathcal{Q})$. Äquivalent sind:

- (i) K ist eine finitäre Quasigleichungsklasse
- (ii) K ist abgeschlossen gegen Subalgebren, Produkte und gerichtete Limiten.
- (iii) K ist abgeschlossen gegen Subalgebren und filtrierte Produkte
- (iv) K ist abgeschlossen gegen Subalgebren, Produkte und Ultraprodukte
- (v) K ist abgeschlossen gegen Produkte und jede Algebra, die finitär lokal in K ist, ist in K .

Beweis:

(i) $\iff$ (ii) folgt aus BH75, Prop. 2

(ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) ist trivial

(iv) $\implies$ (v)

Sei $\mathcal{M} \in K(\Omega)$ finitär lokal in K . Wir konstruieren eine injektive H -Abbildung $f : A \longrightarrow B$ und eine Ω -Algebra $\mathcal{L} \in K$, so daß $\mathcal{L} \models_f \text{Diag}(\mathcal{M})$, d.h. f ist eine Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{L}$. Wegen der Abgeschlossenheit gegen Subalgebren ist dann $\mathcal{M} \in K$.

Für endliches $\mathcal{A} \subseteq \text{Diag}_=(\mathcal{M})$ sei $X_{\mathcal{A}}$ die H -Menge der in $\mathcal{A}$ vorkommenden Variablen und $\mathcal{A}_+$ die (endliche) Menge der Ungleichungen $\{ \neg x=y \mid \exists h \in H \ x, y \in X_{\mathcal{A}}^h \wedge x \neq y \}$. Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_+$ endlich ist, gibt es nach Voraussetzung ein $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \in K$ und $f_{\mathcal{A}} : X_{\mathcal{A}} \longrightarrow B_{\mathcal{A}}$, so daß $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \models_f \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_+$. $f_{\mathcal{A}}$ ist also injektiv.

Sei $I := \{ \mathcal{A} \subseteq \text{Diag}_=(\mathcal{M}) \mid \mathcal{A} \text{ ist endlich} \}$ und für $\mathcal{A} \in I$ sei $I_{\mathcal{A}} := \{ \mathcal{B} \in I \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \}$. Da für $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \in I$

$I_{\mathcal{A}_1} \cap \dots \cap I_{\mathcal{A}_n} = I_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n \in I$, hat das System $\{ I_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in I \}$ die endliche-Durchschnitts-Eigenschaft. Somit existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{P}I$ mit $I_{\mathcal{A}} \in \mathcal{F}$ für $\mathcal{A} \in I$. Sei $\mathcal{L} := \prod \langle \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in I \rangle / \mathcal{F}$. - Wir konstruieren eine H -Abbildung $f : A \longrightarrow B$, die monomorph ist und $\mathcal{L} \models_f \text{Diag}_=(\mathcal{M})$ erfüllt.

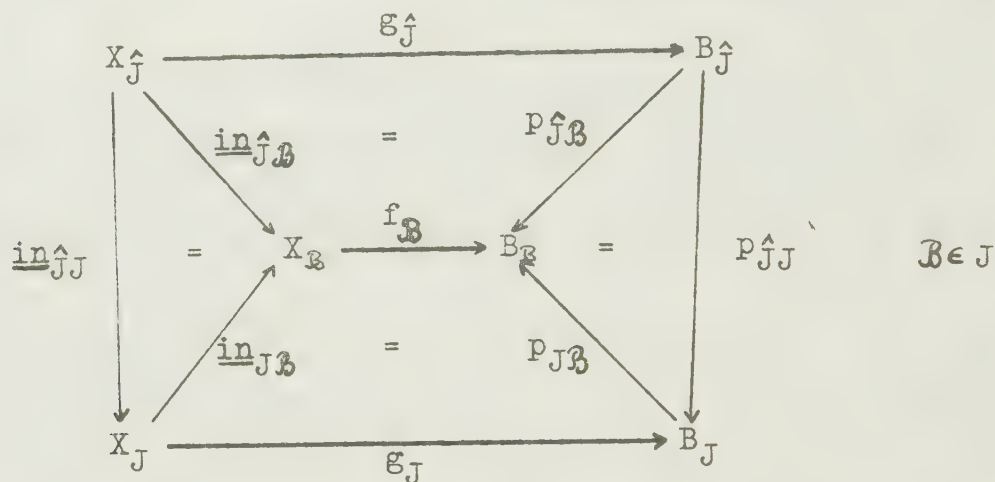
Für $J \in \mathcal{F}$ sei $B_J := \prod \langle B_{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in J \rangle$ mit den Projektionen $p_{J\mathcal{B}} : B_J \longrightarrow B_{\mathcal{B}}$. Sei $X_J := \prod \langle X_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in J \rangle$;

$g_J : X_J \longrightarrow B_J$ ergibt sich aus der universellen Produkteigenschaft :

$$\begin{array}{ccc}
 X_J & \xrightarrow{g_J} & B_J \\
 \downarrow \text{in}_{J\mathcal{B}} & & \downarrow p_{J\mathcal{B}} \\
 X_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{f_{\mathcal{B}}} & B_{\mathcal{B}}
 \end{array}$$

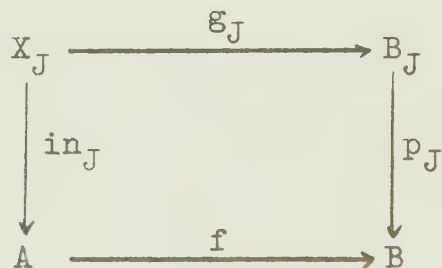
Da $f_{\mathcal{B}}$ und $\text{in}_{J\mathcal{B}}$ monomorph sind und $J \neq \emptyset$, ist g_J monomorph.

Sei $J \subseteq \hat{J} \in \mathcal{F}$, es ist also $X_J \supseteq X_{\hat{J}}$; sei $p_{\hat{J}J} : B_{\hat{J}} \longrightarrow B_J$ die durch $\text{in}_{J\hat{J}} : J \longrightarrow \hat{J}$ induzierte Projektion.



Für alle $\beta \in J$ ist $p_{J\beta} \cdot p_{JJ} \cdot g_J = p_{J\beta} \cdot g_J \cdot \text{in}_{JJ}$, und da $\langle p_{J\beta} : B_J \longrightarrow B_\beta \mid \beta \in J \rangle$ eine Mono-Quelle ist, gilt also $p_{JJ} \cdot g_J = g_J \cdot \text{in}_{JJ}$.

Da $\bigcup \langle X_J \mid J \in \mathcal{F} \rangle \supseteq \bigcup \langle X_{I_A} \mid A \in I \rangle = A$, ist
 $\langle \text{in}_J : X_J \longrightarrow A \mid J \in \mathcal{F} \rangle$ ein gerichteter Limes von
 $\langle \text{in}_{J\hat{J}} : X_J \longrightarrow X_{\hat{J}} \mid J \supseteq \hat{J} \in \mathcal{F} \rangle$. Sei $f : A \longrightarrow B$ die
 Faktorisierung von $\langle p_J \circ g_J : X_J \longrightarrow B \mid J \in \mathcal{F} \rangle$ über den
 gerichteten Limes:



Als gerichteter Limes von Monomorphismen ist f monomorph.
 Sei $a \in \text{Diag}_=(\mathcal{M})$ beliebig und $I_a := I_{\{a\}} = \{A \in I \mid a \in A\}$.
 Nach Konstruktion von $\mathcal{F}$ ist $I_a \in \mathcal{F}$ und daher ist
 $\mathcal{F}_a := \{J \in \mathcal{F} \mid J \subseteq I_a\} \subseteq \mathcal{P}I_a$ cofinal in $\mathcal{F}$ und ein Ultra-
 filter auf $\mathcal{P}I_a$. Also ist

$$\pi \langle \mathcal{L}_A \mid A \in I \rangle / \mathcal{F} \cong \pi \langle \mathcal{L}_A \mid A \in I_a \rangle / \mathcal{F}_a.$$

Da Gleichungen unter Produkten erhalten bleiben, gilt für $J \in \mathcal{F}_a$ $\mathcal{L}_J \models_{g_J} a$ und da finitäre Gleichungen unter gerichteten Limiten erhalten bleiben, gilt somit $\mathcal{L} \models_{p_J \cdot g_J} a$, also

$\mathcal{L} \models_{f \cdot \text{in}_J} a$ und somit $\mathcal{L} \models_f a$.

(v) $\implies$ (ii)

Die Abgeschlossenheit gegen Subalgebren ist trivial (vgl. 4.1.11); die Abgeschlossenheit gegen gerichtete Limiten folgt aus Corollar 4.11. :/:

Es gibt eine hierzu analoge Version für beliebige Quasigleichungsklassen. Die Äquivalenz von (i) und (ii) kann man dann allerdings nicht mehr aus BH75 folgern, dafür ist aber die Implikation (iv) $\implies$ (v) etwas einfacher zu zeigen.

4.18 Theorem

Sei $K \in K(\Omega)$. Äquivalent sind:

- (i) K ist eine Quasigleichungsklasse
- (ii) K ist abgeschlossen gegen Subalgebren, Produkte und regulär gerichtete Limiten
- (iii) K ist abgeschlossen gegen Subalgebren und regulär filtrierte Produkte
- (iv) K ist abgeschlossen gegen Subalgebren, Produkte und reguläre Ultraprodukte
- (v) K ist abgeschlossen gegen Produkte und jede Algebra, die lokal in K ist, ist in K .

Beweis:

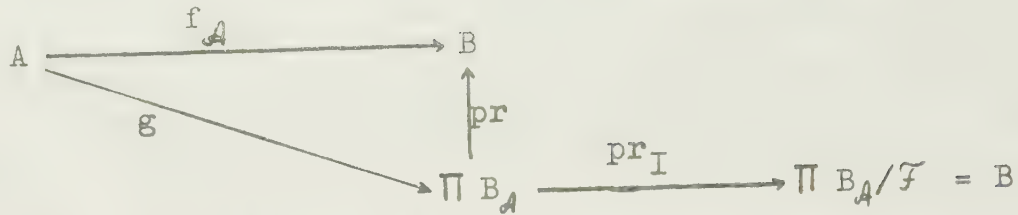
(i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) ist trivial

(iv) $\implies$ (v)

Sei $\mathcal{A} \in K(\Omega)$ lokal in K . Wir konstruieren eine Algebra $\mathcal{L} \in K$ und eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$, die $\mathcal{L} \models_f \text{Diag}(\mathcal{A})$ erfüllt. f ist also eine Einbettung und daher ist dann $\mathcal{A} \in K$.

Sei $I := \{ \mathcal{A} \in \text{Diag}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ ist endlich} \}$ und für $\mathcal{A} \in I$ sei $I_{\mathcal{A}} := \{ \mathcal{B} \in I \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \}$. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathcal{P}I$ mit $I_{\mathcal{A}} \in \mathcal{F}$ für $\mathcal{A} \in I$. Für $\mathcal{A} \in I$ sei $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \in K$, $f_{\mathcal{A}} : A \longrightarrow B_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{L} \models_{f_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$. Wegen der Abgeschlossenheit gegen Subalgebren und Lemma 1.32 können wir annehmen, daß für alle $h \in H$ und alle $\mathcal{A} \in I$ $A^h = \emptyset \iff B_{\mathcal{A}}^h = \emptyset$. Sei $\mathcal{L} := \prod \langle \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in I \rangle / \mathcal{F}$, es ist $\mathcal{L} \in K$, da das Ultraprodukt regulär ist. Sei g durch die universelle Eigenschaft

des Produktes gegeben:



Für jede Formel $b \in \text{Diag}(\mathcal{A})$ gilt wegen des Theorems von Loś

$$\Pi \mathcal{L}_A / \mathcal{F} \models_{\text{pr}_I \cdot g} b \iff \{A \in I \mid \mathcal{L}_A \models_{\text{pr}_A \cdot g} b\} \in \mathcal{F}.$$

Da wegen $\{A \in I \mid \mathcal{L}_A \models_{\text{pr}_A \cdot g} b\} \supseteq I_{\{b\}} \in \mathcal{F}$ die rechte Seite gilt, gilt auch die linke Seite. $f := \text{pr}_I \cdot g$ leistet also das oben Versprochene.

(v) $\implies$ (i)

Sei X eine H-unendliche H-Menge und

$$\text{Th}_Q(K) := \{q \mid \exists Z \subseteq X \quad q \in \text{Qgl}(\Omega, Z) \wedge \forall \mathcal{A} \in K \quad \mathcal{A} \models q\}.$$

$$\hat{K} := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \text{Th}_Q(K)\}.$$

Trivialerweise ist $K \subseteq \hat{K}$.

Sei $\mathcal{A} \in \hat{K}$ und $\mathcal{A} \in \text{Diag}(\mathcal{A})$ ein beliebiges endliches Teil-diagramm. Wir zeigen, daß $\mathcal{A}$ in K realisierbar ist; dann ist nach Voraussetzung $\mathcal{A} \in K$ und somit $K = \hat{K}$, womit die Behauptung bewiesen ist. - Sei

$$\mathcal{R} \xrightleftharpoons[p]{p} \text{Pol}(\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{e} \mathcal{L} \xrightarrow{r} \mathcal{L}$$

folgendes Diagramm in $K(\Omega)$: $\mathcal{R}$ sei die von $\mathcal{A} \cap \text{Diag}_=(\mathcal{A})$ erzeugte Subalgebra von $\text{Pol}(\Omega, \mathcal{A}) \times \text{Pol}(\Omega, \mathcal{A})$, p, q die Projektionen und $\langle e, \mathcal{L} \rangle$ ein Coegalisateur von $\langle p, q \rangle$, $\langle r, \mathcal{L} \rangle$ eine Reflexion von $\mathcal{L}$ in K (vgl. 3.9). Wegen Lemma 3.17 gilt $\mathcal{L} \models_{e \cdot \eta_A^P} \text{Diag}_=(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}$ und wegen 4.1.1 also

$$\mathcal{L} \models_{r \cdot e \cdot \eta_A^P} \text{Diag}_=(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}. \text{ Es bleibt zu zeigen, daß für jede Ungleichung } "\neg a=b" \in \mathcal{A} \text{ gilt } \mathcal{L} \models_{r \cdot e \cdot \eta_A^P} "\neg a=b".$$

Annahme, es gelte $\mathcal{L} \models_{r \cdot e \cdot \eta_A^P} "a=b"$. Sei $\mathcal{V} \in K$ und

$g : A \longrightarrow D = U(\mathcal{V})$ beliebig und $\mathcal{V} \models \text{Diag}_=(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}$. Also gibt es

$s : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{V}$ und $g = s \cdot e \cdot \eta_A^P$. Da $\langle r, \mathcal{L} \rangle$ eine Reflexion ist, gibt es

$t : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{V}$ und $s = t \cdot r$, also ist

$$g = t \cdot r \cdot e \cdot \eta_A^P. \text{ Nach 4.1.1 gilt somit } \mathcal{V} \models_g "a=b" \text{ und da } \mathcal{V} \text{ und } g$$

beliebig gewählt waren, gilt die Quasigleichung, die die Gleichungen von $\text{Diag}_=(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}$ als Prämissen und $"a=b"$ als Konklusion hat, in K . Widerspruch zu $\mathcal{L} \in K$. ://

Mit Hilfe von Lemma 4.14 können wir die von einer Klasse $K \in K(\Omega)$ erzeugte Quasigleichungsklasse beschreiben, außerdem können wir semantisch zeigen, daß für endliches H jede Quasigleichungsklasse finitär ist, ein syntaktischer Beweis ist in Lemma 2.24 gegeben.

4.19 Theorem

Sei $K \in K(\Omega)$ und sei $\text{Imp } K$ ($\text{Imp}_f K$) die von K erzeugte (finitäre) Quasigleichungsklasse.

$$1. \text{Imp}_f K = S \underline{P} K$$

$$2. \text{Imp}_f K = L_f P K$$

$$3. \text{Imp } K = S \underline{P} S K$$

$$4. \text{Imp } K = L P K$$

5. Falls H endlich ist, ist jede Quasigleichungsklasse finitär.

Beweis:

1. Da wegen 4.17 (iii) $\text{Imp}_f K \supseteq S \text{Imp}_f K$ und $\text{Imp}_f K \supseteq \underline{P} \text{Imp}_f K$ und da $\text{Imp}_f K \supseteq K$, gilt wegen der Monotonie von $\underline{P}$ $\text{Imp}_f K \supseteq \underline{P} \text{Imp}_f K \supseteq \underline{P} K$, woraus wiederum aus der Monotonie von S folgt $\text{Imp}_f K \supseteq S \text{Imp}_f K \supseteq S \underline{P} K$.

Umgekehrt zeigen wir, daß $S \underline{P} K$ eine finitäre Quasigleichungsklasse ist, woraus dann $S \underline{P} K \supseteq \text{Imp}_f K$ folgt.

$$S S \underline{P} K \subseteq S \underline{P} K \quad \text{folgt aus 4.14.3}$$

$$\underline{P} S \underline{P} K \subseteq S \underline{P} \underline{P} K \subseteq S \underline{P} K \quad \text{folgt aus 4.14.8 und 4.14.3 .}$$

Also ist $S \underline{P} K$ abgeschlossen gegen Subalgebren und filtrierte Produkte und somit eine finitäre Quasigleichungsklasse.

2., 3., 4. werden ähnlich bewiesen unter Zuhilfenahme der entsprechenden Ungleichungen von Lemma 4.14

5. Sei K eine Quasigleichungsklasse, also $\text{Imp } K = K$, und sei $\text{Imp}_f K$ die von K erzeugte finitäre Quasigleichungsklasse. Es ist $\text{Imp}_f K = S \underline{P} K \subseteq S \underline{P} S K = \text{Imp } K = K$. $\therefore$

4.20 Satz von Birkhoff für finitäre Gleichungsklassen.

Sei $K \subseteq K(\Omega)$. Äquivalent sind:

- (i) K ist eine finitäre Quasigleichungsklasse und K ist abgeschlossen gegen homomorphe Bilder.
- (ii) K ist abgeschlossen gegen homomorphe Bilder, Subalgebren, Produkte und gerichtete Limiten.
- (iii) K ist abgeschlossen gegen homomorphe Bilder, Subalgebren und filtrierte Produkte
- (iv) K ist abgeschlossen gegen homomorphe Bilder, Subalgebren, Produkte und Ultraprodukte.
- (v) K ist abgeschlossen gegen homomorphe Bilder, Produkte und jede Algebra, die lokal in K ist, ist in K .
- (vi) K ist eine finitäre Gleichungsklasse.

Beweis:

(i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) $\iff$ (v) folgt aus 4.17.

(vi) $\implies$ (i) ist trivial.

(ii) $\implies$ (vi)

Sei X eine H -abzählbar-unendliche H -Menge und sei $\text{Th}_G(K)$ die Menge aller Ω -Gleichungen, die in K gelten und die als Variablenmenge eine endliche Teilmenge von X haben.

Sei $\hat{K} := \{\alpha \in K(\Omega) \mid \alpha \models \text{Th}_G(K)\}$. Trivialerweise ist $K \subseteq \hat{K}$.

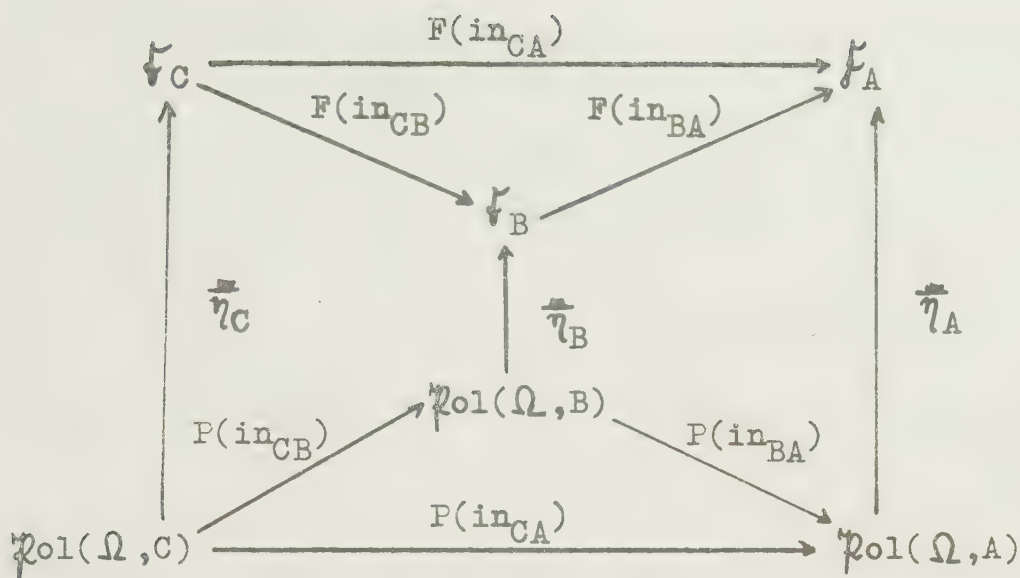
Sei $\alpha \in \hat{K}$, also $\alpha \models \text{Th}_G(K)$ und $A = U(\alpha)$, $\mathcal{F}_A$ die von A erzeugte freie Algebra in K (vgl. Lemma 3.10), $\eta_A : A \longrightarrow F_A$ die Einheit der Adjunktion. Sei R die von $\eta_A \in A \times F_A$ erzeugte Subalgebra von $\alpha \times \mathcal{F}_A$. Nach Voraussetzung ist R linkstotal und da $\mathcal{F}_A$ von A erzeugt wird, rechtstotal. Wir zeigen, daß R rechtseindeutig ist, dann ist nämlich $\bar{R} \in \text{Abb}(F_A, A)$ und somit $\bar{R} : \mathcal{F}_A \longrightarrow \alpha$ ein surjektiver Homomorphismus und wegen der Abgeschlossenheit gegen homomorphe Bilder folgt $\alpha \in K$, womit $K = \hat{K}$ und somit die Behauptung bewiesen ist.

Sei also $\langle x_1, y \rangle \in R^h$ und $\langle x_2, y \rangle \in R^h$. Dann gibt es

$p_1, p_2 \in \text{Pol}^h(\Omega, C) \subseteq \text{Pol}^h(\Omega, A)$ mit endlichem $C \subseteq A$ und

$p_i, \alpha(1_A) = x_i, p_i, \mathcal{F}(\eta_A) = y$ für $i = 1, 2$.

Da K gegen gerichtete Limiten abgeschlossen ist, ist $\mathcal{F}_A$ in $K(\Omega)$ gerichteter Limes der $\mathcal{F}_B$, $B \subseteq A$ und B endlich.



$p_{1,f}(\eta_A) = p_{2,f}(\eta_A)$ ist nach Definition äquivalent zu $\eta_A^h(p_1) = \eta_A^h(p_2)$, wegen der Kommutativität des Diagrammes also $(F(\text{in}_{CA}) \cdot \eta_C)^h(p_1) = (F(\text{in}_{CA}) \cdot \eta_C)^h(p_2)$. Da $\text{Pol}(\Omega, C)$ stark finitär ist, gibt es somit ein endliches $B \subseteq A$ und $(F(\text{in}_{CB}) \cdot \eta_C)^h(p_1) = (F(\text{in}_{CB}) \cdot \eta_C)^h(p_2)$, d.h.

$p_{1,f}(\eta_A \cdot \text{in}_{BA}) = p_{2,f}(\eta_A \cdot \text{in}_{BA})$ und da f_A frei ist und B eine Teilmenge der freien Erzeugenden, gilt $p_{1,f} = p_{2,f}$ für $p_1, p_2 \in \text{Pol}^h(\Omega, B)$ und somit nach Voraussetzung $p_{1,\alpha} = p_{2,\alpha}$, also $x_1 = x_2$. :/:

Wenn man den Beweis betrachtet, sieht man, daß die Abgeschlossenheit gegen gerichtete Limiten nur dazu diene, daß die Gleichung " $p_1 = p_2$ " als Gleichung über einer endlichen Variablenmenge aufgefaßt werden kann. Wir erhalten somit folgendes Corollar:

4.21 Satz von Birkhoff

Sei $K \subseteq K(\Omega)$. Äquivalent sind:

- (i) K ist eine Gleichungsklasse
- (ii) K ist abgeschlossen gegen homomorphe Bilder, Subalgebren und Produkte.

Man kann natürlich die Bedingungen von 4.18 für Gleichungsklassen übertragen, erhält dann aber im wesentlichen jeweils Bedingungen, die stärker als (ii) sind, da regulär gerichtete Limiten spezielle homomorphe Bilder sind.

Ähnlich wie Theorem 4.18 wird folgendes Theorem bewiesen

4.22 Theorem

Sei $K \subseteq K(\Omega)$ und sei $\text{Var } K$ ($\text{Var}_f K$) die von K erzeugte (finitäre) Gleichungsklasse.

1. $\text{Var}_f K = Q S \underline{P} K$
2. $\text{Var } K = Q S P K$
3. Falls H endlich ist, ist jede Gleichungsklasse finitär.

Zum Abschluß konstruieren wir eine Gleichungsklasse, die nicht finitär ist.

4.23 Es gibt für jedes unendliche H Gleichungsklassen, die nicht finitär sind.

Gegenbeispiel:

Sei Ω der leere Operatorenbereich und sei $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}^H$ ein Mengensystem, das folgende Bedingungen erfüllt:

1. $G \in \mathcal{Y} \wedge G' \subseteq G \rightarrow G' \in \mathcal{Y}$
2. Es gibt eine gerichtete Teilmenge $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$ mit $\bigcup \langle G \mid G \in \mathcal{Y}' \rangle = H$
3. $H \notin \mathcal{Y}$

Beispiele: $\mathcal{Y} = \mathcal{P}^H \setminus \{H\}$; $\mathcal{P}_{\text{fin}}^H$; nicht-prinzipales Primideal $\mathcal{Y}$.

(Falls H endlich ist, gibt es kein Mengensystem, das die Forderungen 1. - 3. erfüllt)

Sei $K \subseteq \text{Ens}^H$ folgende Klasse:

$X \in K \iff X$ ist fast trivial oder $\{h \mid x_h \neq \emptyset\} \in \mathcal{Y}$.

K ist eine Gleichungsklasse (vgl. 4.21); die Gleichungen kann man folgendermaßen beschreiben:

Für $h \in H$ sei $x^h := \{x_h, y_h\}$; für $G \in H$, $G \notin \mathcal{Y}$ und $\hat{h} \in G$

sei $x_G \subseteq X$ die durch $x_G^h := \begin{cases} x^h & \text{für } h \in G \\ \emptyset & \text{für } h \notin G \end{cases}$ definierte H -Menge und $g_{G, \hat{h}} := "x_{\hat{h}} = y_{\hat{h}}"$ $\in \text{Gl}_{\hat{h}}(\Omega, x_G)$.

K ist nicht abgeschlossen gegen gerichtete Limiten:

Sei $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$ eine gerichtete Menge mit $\bigcup \langle G \mid G \in \mathcal{Y}' \rangle = H$ und sei A eine beliebige Menge, $\text{card } A \geq 2$, und für $G \in \mathcal{Y}'$ sei

$z_G^h := \begin{cases} A & \text{falls } h \in G \\ \emptyset & \text{falls } h \notin G \end{cases}$, es ist also $z_G \in K$. Die

H-Menge $Z = A^H$ ist gerichteter Limes der H-Mengen z_G ,

aber wegen 3. ist $Z \notin K$. :/:

Anhang A : Reguläre und (stark) finitäre Funktoren

In H74 werden reguläre Kategorien und reguläre Funktoren untersucht. Es zeigt sich, daß reguläre Funktoren, deren Zielkategorie regulär ist, wesentliche Eigenschaften aufweisen, die man von Kategorien von Ω -Algebren kennt. Zusätzlich zu den Sätzen von H74 zeigen wir, daß in regulären Kategorien mit einem regulären Funktor "jedes Objekt Quotient eines freien Objektes ist", ein Satz, der - zusammen mit den Homomorphiesätzen - zu den grundlegenden Sätzen der allgemeinen Algebra zählt.

In der "mengentheoretischen" Algebra spielen dagegen gewisse Endlichkeitsbedingungen eine Rolle. So in den algebraischen Hüllensystemen, algebraischen Hüllenoperatoren und algebraischen Verbänden. Diese Endlichkeitsbedingungen stehen häufig in engem Zusammenhang mit vollständiger Induktion und Rekursion - in der kategoriellen Algebra untersucht man dagegen das Verhalten unter gerichteten Limiten.

Bei der Untersuchung von Implikations-Klassen (=Quasigleichungsklassen) wird in BH75 der Begriff "algebroidal" benutzt: in regulären und algebroidalen Kategorien sind Implikationsklassen gerade die Klassen, die gegen Mono-Quellen und gerichtete Limiten abgeschlossen sind. Wir werden in diesem Anhang zeigen, daß für einen regulären, stark finitären Funktor, dessen Bildkategorie regulär und stark algebroidal ist, auch die Urbildkategorie diese Eigenschaften hat, falls in der Bildkategorie jedes freie Objekt gerichtete Vereinigung von finitären freien Objekten ist. Außerdem werden wir die finitären Objekte der Urbildkategorie als die "finitär präsentierten" Objekte charakterisieren.

A.1 Definitionen (vgl. H74, Def 1.1)

Sei $\underline{K}$ eine Kategorie, eine Quelle $\langle f_i : X \longrightarrow X_i \mid i \in I \rangle$ *) heißt Mono-Quelle, wenn für alle $r, s : Y \longrightarrow X$

$$(\forall i \in I \ f_i \cdot r = f_i \cdot s) \rightarrow r = s \quad .$$

Eine Faktorisierung $\langle f_i : X \longrightarrow X_i \rangle = \langle m_i \cdot e : X \longrightarrow X_i \rangle$

*) I kann eine echte Klasse sein .

ist eine reguläre Faktorisierung, wenn $e : X \longrightarrow Y$ ein regulärer Epimorphismus und $\langle m_i : Y \longrightarrow X_i \mid i \in I \rangle$ eine Mono-Quelle ist. $\underline{K}$ heißt regulär, wenn jede Quelle in $\underline{K}$ eine reguläre Faktorisierung besitzt.

A.2 Definition (vgl. H74, Def. 2.1)

Sei $\underline{L}$ eine Kategorie. Ein Funktor $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ heißt regulär, falls $\underline{L}$ regulär ist und

- (1) G hat einen links-adjungierten Funktor
- (2) G erschafft reguläre Faktorisierungen, d.h. falls $\langle f_i : A \longrightarrow A_i \mid i \in I \rangle$ eine Quelle in $\underline{K}$ ist und $\langle m_i \cdot e : GA \longrightarrow GA_i \mid i \in I \rangle$ eine reguläre Faktorisierung von $\langle Gf_i : GA \longrightarrow GA_i \mid i \in I \rangle$, dann gibt es genau eine Faktorisierung $\langle \bar{m}_i \cdot \bar{e} : A \longrightarrow A_i \mid i \in I \rangle$ von $\langle f_i : A \longrightarrow A_i \mid i \in I \rangle$, so daß $G\bar{e} = e$ und für alle $i \in I$ $G\bar{m}_i = m_i$; und diese Faktorisierung ist regulär

Als nächstes führen wir "erzeugende Morphismen" ein. Die Morphismen, die in H74 "G-erzeugende Morphismen" genannt werden, sind in HS73 "extrem G-erzeugende Morphismen". Da in regulären Kategorien extreme Epimorphismen schon reguläre Epimorphismen sind, scheint es sinnvoll, nach einem Regularitätskriterium für G-erzeugende Morphismen zu suchen. In Definition A.3 definieren wir "regulär G-erzeugende Morphismen" und zeigen in A.4, daß bei regulären Funktoren jeder extrem G-erzeugende Morphismus regulär G-erzeugend ist.

A.3 Definition

Sei $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein regulärer Funktor, $\langle F, G, \eta, \epsilon \rangle$ sei die adjungierte Situation. Sei $g : X \longrightarrow GA$ ein Morphismus in $\underline{K}$.

1. g ist ein extrem G-erzeugender Morphismus, falls
 - a) für alle $r, s : A \longrightarrow \cdot$ $Gr \cdot g = Gs \cdot g \rightarrow r = s$ und
 - b) für alle Monomorphismen $m : B \longrightarrow A$ und Morphismen $f : X \longrightarrow GB$ mit $g = Gm \cdot f$ ist m ein Isomorphismus.
2. g ist ein regulär G-erzeugender Morphismus, falls

$$FX \xrightarrow{\varepsilon_A \cdot Fg} A \quad (= FX \xrightarrow{Fg} FGA \xrightarrow{\varepsilon_A} A)$$

ein regulärer Epimorphismus ist.

Für adjungierte Situationen $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle$ benötigen wir folgende Hilfssätze :

A.4.1 Für $g : X \longrightarrow GA$ ist $G\varepsilon_A \cdot GFg \cdot \eta_X = g$

2. Für $r, s : FX \longrightarrow B$ gilt $Gr \cdot \eta_X = Gs \cdot \eta_X \rightarrow r = s$.

A.5 Lemma

Sei $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein regulärer Funktor. Für

$g : X \longrightarrow GA$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) g ist ein extrem G -erzeugender Morphismus

(ii) g ist ein regulär G -erzeugender Morphismus

Beweis:

(i) $\implies$ (ii)

$\varepsilon_A \cdot Fg$ ist ein Epimorphismus : seien nämlich $r, s : A \longrightarrow B$ mit $r \cdot \varepsilon_A \cdot Fg = s \cdot \varepsilon_A \cdot Fg$, dann ist $Gr \cdot g = Gr \cdot G\varepsilon_A \cdot GFg \cdot \eta_X =$

$Gs \cdot G\varepsilon_A \cdot GFg \cdot \eta_X = Gs \cdot g$ und somit nach Voraussetzung $r = s$.

$\varepsilon_A \cdot Fg$ erfüllt die Extremitätseigenschaft : sei $\varepsilon_A \cdot Fg = m \cdot f$, wobei m ein Monomorphismus ist, dann ist $g = G\varepsilon_A \cdot GFg \cdot \eta_X = Gm \cdot Gf \cdot \eta_X$ und nach Voraussetzung ist m ein Isomorphismus.

$\varepsilon_A \cdot Fg$ ist also ein extremer Epimorphismus, und da in regulären Kategorien extreme Epimorphismen reguläre Epimorphismen sind, folgt die Behauptung.

(ii) $\implies$ (i)

Sei $\varepsilon_A \cdot fg$ ein regulärer Epimorphismus und seien

$r, s : A \longrightarrow B$ mit $Gr \cdot g = Gs \cdot g$. Dann ist $Gr \cdot G\varepsilon_A \cdot GFg \cdot \eta_X = Gs \cdot G\varepsilon_A \cdot GFg \cdot \eta_X$ und wegen A.4.2 also $r \cdot \varepsilon_A \cdot Fg = s \cdot \varepsilon_A \cdot Fg$, und somit $r = s$.

Sei $g = Gm \cdot f$ und $m : B \longrightarrow A$ ein Monomorphismus. Dann ist $\varepsilon_A \cdot Fg = \varepsilon_A \cdot FGM \cdot Ff = m \cdot \varepsilon_B \cdot Ff$ und da $\varepsilon_A \cdot Fg$ ein extremer Epimorphismus ist, ist m ein Isomorphismus. :/:

Da speziell $1_{GA} : GA \longrightarrow GA$ ein extrem G-erzeugender Morphismus ist, folgt hieraus

A.6 Corollar

Jedes Objekt in $\underline{K}$ ist Quotient eines freien Objektes, d.h. für jedes Objekt $A \in K$ *) gibt es

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{s} \end{array} FG \xrightarrow{e} A, \quad ,$$

so daß $\langle e, A \rangle$ Coegalisateur von $\langle r, s \rangle$ ist.

Ein Diagramm $R \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{s} \end{array} FX \xrightarrow{e} A$ nennen wir im folgenden eine Präsentation von A, wenn $\langle e, A \rangle$ ein Coegalisateur von $\langle r, s \rangle$ ist.

Als nächstes sollen Endlichkeitsbedingungen für reguläre Kategorien und Funktoren betrachtet werden. Allerdings ist für die Gültigkeit der folgenden Sätze nicht die Endlichkeit an sich" (z.B. wegen der Möglichkeit der Rekursion) wesentlich, sondern die Beschränkung auf eine reguläre Kardinalzahl, die in gewissen Konstruktionen eine Rolle spielt.

Sei $\beth$ eine reguläre Kardinalzahl, die für den Rest dieses Anhangs als vorgegeben angenommen werde. Eine Menge M heiße klein genau dann, wenn $\text{card } M < \beth$. Für den Fall $\beth = \aleph_0$ sind die kleinen Mengen also gerade die endlichen Mengen.

Unter einer gerichteten Menge verstehen wir dem entsprechend eine geordnete Menge, in der jede kleine Menge eine obere Schranke besitzt. Eine gerichtete Menge ist also immer nicht-leer, da die leere Menge eine obere Schranke besitzen soll. Eine gerichtete Familie in $\underline{K}$ ist ein Funktor von einer gerichteten Menge (als Kategorie) nach $\underline{K}$. Ein gerichteter Limes ist ein Colimes einer gerichteten Familie. Falls alle kanonischen Morphismen Monomorphismen sind, nennen wir einen gerichteten Limes auch gerichtete Vereinigung.

*) Für eine Kategorie $\underline{K}$ sei K die Objektklasse; ebenso sei für beliebige Kategorien die Objektklasse durch dasselbe Symbol ohne die Unterstreichung gekennzeichnet.

A.6 Definition (vgl. HS73, 22E)

Seien $\underline{K}, \underline{L}$ Kategorien und $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Funktor.

1. G heißt finitär, falls für jeden gerichteten Limes $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \rangle$ die Senke $\langle Gf_i : GA_i \longrightarrow GA \rangle$ eine Epi-Senke ist.
2. G heißt stark finitär, falls G gerichtete Limiten erhält.
3. Ein Objekt $A \in K$ heißt finitär (bzw. stark finitär), falls $\text{hom}(A, \bullet) : \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ finitär (bzw. stark finitär) ist.
4. Eine Kategorie $\underline{K}$ heißt algebroidal (bzw. stark algebroidal), falls für jedes Objekt $A \in K$ ein gerichteter Limes $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \mid i \in I \rangle$ existiert, in dem für alle $i \in I$ A_i finitär (bzw. stark finitär) ist.

A.7 Folgerung

1. $A \in K$ ist genau dann finitär, wenn für jeden gerichteten Limes $\langle f_i : B_i \longrightarrow B \rangle$ und jeden Morphismus $f : A \longrightarrow B$ es einen Index i und einen Morphismus $g : A \longrightarrow B_i$ gibt, so daß $f = f_i \cdot g$.
2. A ist genau dann stark finitär, wenn A finitär ist und für alle $g_1, g_2 : A \longrightarrow B_i$ mit $f_i \cdot g_1 = f_i \cdot g_2$ gibt es ein $k \geq i$ und $f_{ik} \cdot g_1 = f_{ik} \cdot g_2$.

Beweis:

Diese beiden Behauptungen sind eine Konsequenz des folgenden Lemmas :/:

A.8 Lemma

1. Sei $\langle f_i : B_i \longrightarrow B \mid i \in I \rangle$ eine Epi-Senke in Ens und sei $x \in B$. Dann gibt es $i \in I$ und $z \in B_i$, so daß $f_i(z) = x$.
2. Sei $\langle f_i : B_i \longrightarrow B \mid i \in I \rangle$ ein gerichteter Limes in Ens und sei für ein $i \in I$ $f_i(x) = f_i(y)$. Dann gibt es einen Index $k \geq i$ und $f_{ik}(x) = f_{ik}(y)$.

Folgendes Lemma kann man durch Diagrammjagd direkt aus A.7 folgern:

A.9 Lemma

Sei $A \in K$ finitär (bzw. stark finitär) und $r : A \longrightarrow A'$ eine Retraktion. Dann ist A' finitär (bzw. stark finitär).

Der Begriff "algebroidal" ist eine Verallgemeinerung des Begriffes "algebraisch" im Zusammenhang "algebraischer Verband" : Wenn man Verbände als partielle Ordnungen und somit als Kategorien betrachtet, ist ein Element des Verbandes genau dann finitär, wenn es kompakt ist, d.h.

$$a \leq \bigvee \langle a_i \mid i \in I \rangle \rightarrow a \leq \bigvee \langle a_i \mid i \in J \rangle \quad \text{für eine endliche Teilmenge } J \subseteq I .$$

(Da für geordnete Mengen nach Definition $\text{card}(\text{hom}(a,b)) \leq 1$, ist jedes finitäre Element stark finitär). Ein Verband ist genau dann algebraisch, wenn er algebroidal ist (vorausgesetzt, daß $\mathcal{V} = \mathcal{X}_0$) .

A.10 Lemma

Seien $\underline{K}, \underline{L}$ Kategorien, $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$, $F : \underline{L} \longrightarrow \underline{K}$ seien Funktoren und F sei links-adjungiert zu G . G sei stark finitär und $X \in \underline{L}$ sei finitär (bzw. stark finitär). Dann ist $FX \in K$ finitär (bzw. stark finitär) .

Beweis:

Die Funktoren $\text{hom}(FX, \bullet)$ und $\text{hom}(X, G\bullet)$ sind natürlich äquivalent und nach Voraussetzung erhält G gerichtete Limiten. $\therefore$:

A.11 Definition

Sei $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Funktor mit einem links-adjungierten F . Ein Objekt $A \in K$ heißt :

1. finitär (bzw. stark finitär) G-erzeugt , falls es ein finitäres (bzw. stark finitäres) Objekt $X \in \underline{L}$ gibt und einen extrem G-erzeugenden Morphismus $g : X \longrightarrow GA$.
2. finitär (bzw. stark finitär) G-präsentiert, falls es eine Präsentation

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{s} \end{array} FX \xrightarrow{e} A$$

von A gibt, so daß R finitär (bzw. stark finitär) G-erzeugt ist und $X \in \underline{L}$ finitär (bzw. stark finitär) ist.

Da das linke Quadrat für beliebige $i \leq j$ kommutiert (es ist
 ① im Diagramm auf Seite 66, Mitte) gibt es $g : GA \longrightarrow GC$,
 so daß für alle Indizes i $Gn_i \cdot g_i = g \cdot f_i$. Da
 $\langle f_i : B_i \longrightarrow GA \rangle$ eine Epi-Senke ist und für alle i
 $Gm \cdot g \cdot f_i = Gm \cdot Gn_i \cdot g_i = Gm_i \cdot g_i = f_i = 1_{GA} \cdot f_i$, folgt $Gm \cdot g = 1_{GA}$.
 Also ist Gm eine Retraktion. Als gerichteter Limes der Mono-
 morphismen Gm_j ist Gm ein Monomorphismus. Somit ist Gm
 ein Isomorphismus und da G Isomorphismen reflektiert, ist
 also auch m ein Isomorphismus. Damit ist $\langle m_i : A_i \longrightarrow A \rangle$
 ein gerichteter Limes. ://

Als nächstes zeigen wir, daß unter gewissen Voraussetzungen die
 finitär G -erzeugten Objekte genau die λ -erzeugbaren Objekte
 im Sinne von GU71 sind.

A.13 Theorem

Sei $G : \underline{K} \longrightarrow L$ ein regulärer und stark finitärer Funk-
 tor mit dem links-adjungierten F . $\underline{L}$ sei regulär und al-
 gebroidal (bzw. stark algebroidal), $\underline{L}$ besitze gerichtete
 Limiten und in $\underline{L}$ seien gerichtete Limiten von Monomor-
 phismen monomorph.

Für $A \in K$ sind folgende Bedingungen äquivalent :

- (i) A ist finitär (bzw. stark finitär) G -erzeugt
- (ii) Für jede gerichtete Vereinigung $\langle m_i : B_i \longrightarrow B \rangle$
 und jeden Morphismus $f : A \longrightarrow B$ gibt es einen
 Index i und $g : A \longrightarrow B_i$, so daß $m_i \cdot g = f$.

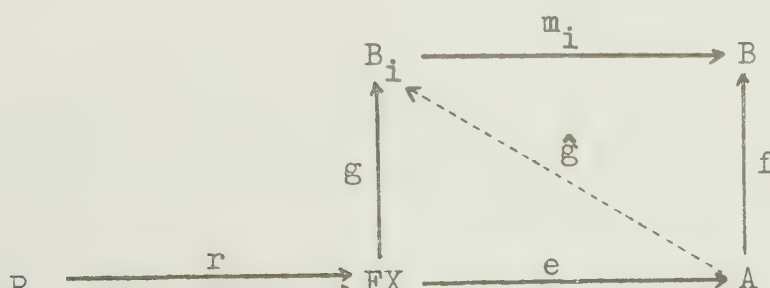
Beweis:

(i) $\implies$ (ii)

Sei $m_i : B_i \longrightarrow B$ eine gerichtete Vereinigung und
 $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus, sei

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{s} \end{array} FX \xrightarrow{e} A$$

eine Präsentation von A , wobei FX finitär ist. Es gibt also
 einen Index i und $g : FX \longrightarrow B_i$, so daß $f \cdot e = m_i \cdot g$.



Also gilt $m_i \cdot g \cdot r = f \cdot e \cdot r = f \cdot e \cdot s = m_i \cdot g \cdot s$ und da m_i ein Monomorphismus ist, $g \cdot r = g \cdot s$. Da e ein Coequalisator von $\langle r, s \rangle$ ist, gibt es $\hat{g} : A \longrightarrow B_i$ und $\hat{g} \cdot e = g$. Also $m_i \cdot \hat{g} \cdot e = m_i \cdot g = f \cdot e$, und da e ein Epimorphismus ist, $m_i \cdot \hat{g} = f$.

(ii) $\implies$ (i)

Sei $\langle x_i : A_i \longrightarrow A \rangle$ eine gerichtete Vereinigung, wobei alle A_i finitär (bzw. stark finitär) G -erzeugt sind. Nach Voraussetzung gibt es einen Index i und $g : A \longrightarrow A_i$, so daß $m_i \cdot g = 1_A$. m_i ist also eine Retraction und ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus. Somit ist A finitär (bzw. stark finitär) G -erzeugt.

A.14 Theorem

Sei $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein regulärer und stark finitärer Funktor mit dem links-adjungierten $F : \underline{L} \longrightarrow \underline{K}$ sei regulär und stark algebroidal, $\underline{L}$ besitzt gerichtete Limiten, und in $\underline{L}$ seien gerichtete Limiten von Monomorphismen monomorph.

Für $A \in \underline{K}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (i) A ist stark finitär G -präsentiert
- (ii) A ist stark finitär
- (iii) A ist finitär

Beweis:

(i) $\implies$ (ii)

Sei $R \xrightarrow[\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow}]{\substack{f \\ g}} FX \xrightarrow{e} A$ eine Präsentation, wobei FX stark finitär und R stark finitär G -erzeugt ist,

$e' : FZ \longrightarrow R$ sei ein regulärer Epimorphismus und Z sei stark finitär. Sei $\langle f_i : B_i \longrightarrow B \rangle$ ein gerichteter Limes von $\langle f_{ij} : B_i \longrightarrow B_j \rangle$ und sei $g : A \longrightarrow B$ beliebig.



Da FX finitär ist, gibt es $i \in I$ und $\hat{g} : FX \longrightarrow B_i$, so daß $g \cdot e = f_i \cdot \hat{g}$. Es ist

$f_i \cdot \hat{g} \cdot r \cdot e' = g \cdot e \cdot r \cdot e' = g \cdot e \cdot s \cdot e' = f_i \cdot \hat{g} \cdot s \cdot e'$ und da FZ stark finitär ist, gibt es $j \in I$ und $f_{ij} \cdot \hat{g} \cdot r \cdot e' = f_{ij} \cdot \hat{g} \cdot s \cdot e'$. Da e' ein Epimorphismus ist, folgt daraus $f_{ij} \cdot \hat{g} \cdot r = f_{ij} \cdot \hat{g} \cdot s$. Da $\langle e, A \rangle$ Coegalisorator von $\langle r, s \rangle$ ist, folgt die Existenz eines Morphismus $d: A \longrightarrow B_j$ mit $d \cdot e = f_{ij} \cdot \hat{g}$. Somit gilt $g \cdot e = f_i \cdot \hat{g} = f_j \cdot f_{ij} \cdot \hat{g} = f_j \cdot d \cdot e$, und da e epimorph ist, $g = f_j \cdot d$. Also ist A finitär.

Seien $d_1, d_2: A \longrightarrow B_i$ und $f_i \cdot d_1 = f_i \cdot d_2$. Dann ist also $f_i \cdot d_1 \cdot e = f_i \cdot d_2 \cdot e$, und da FX stark finitär, gibt es $j \in I$ mit $f_{ij} \cdot d_1 \cdot e = f_{ij} \cdot d_2 \cdot e$. Da e epimorph ist, folgt $f_{ij} \cdot d_1 = f_{ij} \cdot d_2$, also ist A stark finitär.

(ii) $\implies$ (iii) ist trivial

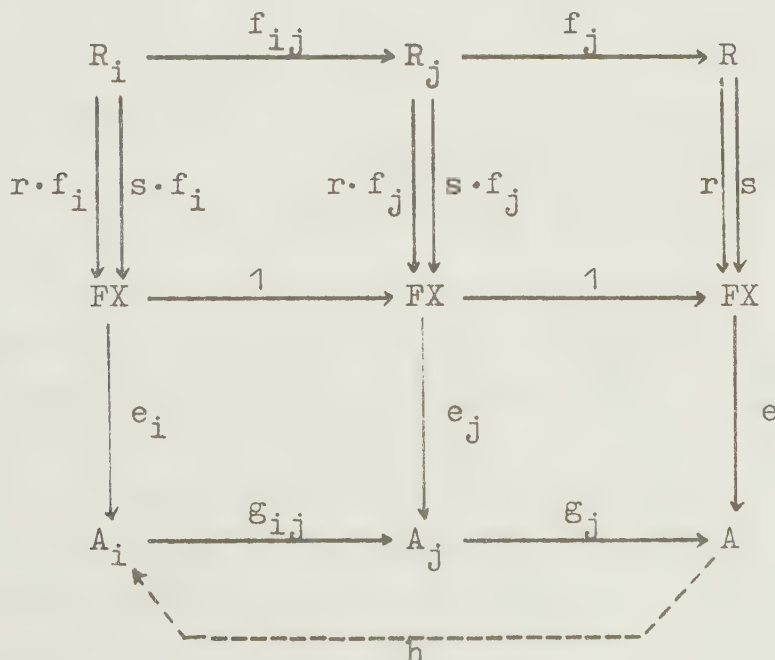
(iii) $\implies$ (i)

Sei A finitär. A erfüllt dann die Bedingung (ii) von A.13 und ist daher stark finitär G-erzeugt. Sei

$R \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{s} \end{array} FX \xrightarrow{e} A$ eine Präsentation von A , wobei

X stark finitär ist. Sei $\langle f_i: R_i \longrightarrow R \rangle$ ein gerichteter Limes, wobei R_i jeweils stark finitär G-erzeugt ist.

Sei für $i \in I$ $\langle e_i, A_i \rangle$ ein Coegalisorator von $\langle r \cdot f_i, s \cdot f_i \rangle$, A_i ist also stark finitär G-präsentiert. Da Colimiten vertauschbar sind, ist A gerichteter Limes der A_i .



Da A finitär ist, gibt es einen Index i und $h: A \longrightarrow A_i$, so daß $g_i \cdot h = 1_A$. Also gilt $g_i \cdot h \cdot g_i \cdot e_i = g_i \cdot e_i$, und da FX

stark finitär ist, gibt es einen Index j und

$g_{ij} \cdot h \cdot g_i \cdot e_i = g_{ij} \cdot e_i \cdot g_{ij} \cdot h$ ist ein Epimorphismus, da es linker Faktor von $g_{ij} \cdot e_i = e_j$ ist, und ein Schnitt, da $g_j \cdot g_{ij} \cdot h = g_i \cdot h = 1_A$; somit ist $g_{ij} \cdot h$ ein Isomorphismus. Da A_j stark finitär G -präsentiert ist, ist somit auch A stark finitär G -präsentiert. $://$

Da der identische Funktor $1_K : K \longrightarrow K$ trivialerweise regulär und stark finitär ist, erhalten wir folgendes Corollar, für das es allerdings auch einen relativ kurzen Beweis gibt, der von A.14 keinen Gebrauch macht.

A.15 Corollar

Sei K eine reguläre Kategorie. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) K ist algebroidal und jedes finitäre Objekt ist stark finitär.

(ii) K ist stark algebroidal.

Beweis: (ohne Benutzung von A.14)

(i) $\implies$ (ii) ist trivial

(ii) $\implies$ (i)

Sei B finitär und $\langle f_i : B_i \longrightarrow B \rangle$ ein gerichteter Limes, wobei B_i stark finitär sind. Es gibt einen Index i und $g : B \longrightarrow B_i$, so daß $f_i \cdot g = 1_B$. f_i ist also eine Retraktion; nach Lemma A.9 ist B stark finitär. $://$

Auf Grund dieses Corollars können wir für Theorem A.14 eine weiter äquivalente Bedingung angeben:

(iv) A ist finitär G -präsentiert.

A.16 Theorem

Sei $G : K \longrightarrow L$ ein regulärer und stark finitärer Funktor mit dem links-adjungierten F . L sei regulär und stark algebroidal, L besitze gerichtete Limiten und in L seien gerichtete Limiten von Monomorphismen monomorph. Falls in K jedes freie Objekt gerichtete Vereinigung von finitären freien Objekten ist, ist K stark algebroidal.

Beweis:

Wegen Corollar A.15 unterscheiden wir in diesem Beweis nicht zwischen finitären und stark finitären Objekten. Sei

$R \xrightleftharpoons[s]{r} FX \xrightarrow{e} A$ eine Präsentation von A . Nach

Theorem A.12 ist R darstellbar als gerichtete Vereinigung von finitär G-erzeugten Subobjekten von R ; sei $\langle t_i : R_i \longrightarrow R \mid i \in I \rangle$ gerichtete Vereinigung von $\langle t_{ik} : R_i \longrightarrow R_k \mid i \leq k \in I \rangle$. Außerdem sei $\langle f_\mu : FX_\mu \longrightarrow FX \mid \mu \in M \rangle$ eine gerichtete Vereinigung von $\langle f_{\mu\nu} : FX_\mu \longrightarrow FX_\nu \mid \mu \leq \nu \in M \rangle$, wobei für $\mu \in M$ X_μ finitär sei. Nach Theorem A.13 gibt es für jedes $i \in I$ ein $\mu \in M$ und $r_{i\mu} : R_i \longrightarrow FX_\mu$, so daß $r \cdot t_i = f_\mu \cdot r_{i\mu}$. Ebenso gibt es $\hat{\mu} \in M$ und $s_{i\hat{\mu}} : R_i \longrightarrow FX_{\hat{\mu}}$, so daß $s \cdot t_i = f_{\hat{\mu}} \cdot s_{i\hat{\mu}}$. Da f_μ Monomorphismen sind, sind diese Morphismen $r_{i\mu}$ und $s_{i\hat{\mu}}$ eindeutig bestimmt.

Sei $\Lambda := \{ \langle i, \lambda \rangle \mid \exists r_{i\lambda} \exists s_{i\lambda} r \cdot t_i = f_\lambda \cdot r_{i\lambda} \wedge s \cdot t_i = f_\lambda \cdot s_{i\lambda} \}$.

Es sei $\langle i, \lambda \rangle \leq \langle j, \kappa \rangle \iff i \leq j \wedge \lambda \leq \kappa$. Seien $P_I : \Lambda \longrightarrow I$ und $P_M : \Lambda \longrightarrow M$ die Projektionen. Nach dem oben gezeigten ist P_I surjektiv und P_M bildet Λ auf ein Endstück von M ab, das also cofinal in M ist. Außerdem sind P_I und P_M monotone Abbildungen. Nach dem folgenden Lemma sind $\langle t_i : R_i \longrightarrow R \mid \langle i, \lambda \rangle \in \Lambda \rangle$ und $\langle f_\lambda : FX_\lambda \longrightarrow FX \mid \langle i, \lambda \rangle \in \Lambda \rangle$ gerichtete Limiten. Sei für $\langle i, \lambda \rangle \in \Lambda$ $\langle e_{i\lambda}, A_{i\lambda} \rangle$ ein Coegalisateur von $\langle r_{i\lambda}, s_{i\lambda} \rangle$. Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Colimiten ist A gerichteter Limes der $A_{i\lambda}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 R_i & \xrightarrow{t_{ij}} & R_j & \xrightarrow{t_j} & R \\
 \downarrow r_{i\mu} \quad \downarrow s_{i\mu} & & \downarrow r_{j\nu} \quad \downarrow s_{j\nu} & & \downarrow r \quad \downarrow s \\
 FX_\mu & \xrightarrow{f_{\mu\nu}} & FX_\nu & \xrightarrow{f_\nu} & FX \\
 \downarrow e_{i\mu} & & \downarrow e_{j\nu} & & \downarrow e \\
 A_{i\mu} & \longrightarrow & A_{j\nu} & \longrightarrow & A
 \end{array}$$

://

A.17 Lemma

Seien I und J gerichtete Mengen und $\varphi: I \longrightarrow J$ eine monotone surjektive Abbildung. Sei

$D := \langle f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j \mid i \leq j \in J \rangle$ eine gerichtete Familie und $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \mid i \in J \rangle$ ein Colimes von D . Dann ist $\langle f_{\varphi(i)} : A_{\varphi(i)} \longrightarrow A \mid i \in I \rangle$ ein Colimes von $D \varphi := \langle f_{\varphi(i), \varphi(x)} : A_{\varphi(i)} \longrightarrow A_{\varphi(x)} \mid i \leq x \in I \rangle$.

Anhang B : Operatoren auf $K(\Omega)$

In diesem Anhang sollen die Ungleichungen zwischen den Operatoren, die in Lemma 4.14 aufgestellt wurden, bewiesen werden.

An mehreren Stellen der Beweise benötigen wir, daß in $K(\Omega)$ Produkte und gerichtete Limiten von Monomorphismen monomorph und von regulären Epimorphismen regulär Epimorph sind. Dieses gilt, da $U : K(\Omega) \longrightarrow \text{Ens}^H$ Produkte, gerichtete Limiten, Monomorphismen und reguläre Epimorphismen erhält und reflektiert und in Ens^H

- Produkte von Monomorphismen monomorph sind, was für jede Kategorie gilt,
- Produkte von regulären Epimorphismen regulär epimorph sind, da reguläre Epimorphismen genau die Retraktionen sind,
- gerichtete Limiten von Monomorphismen monomorph sind wegen Theorem 3.1.4,
- gerichtete Limiten von regulären Epimorphismen reguläre Epimorphismen sind, da reguläre Epimorphismen genau die Epimorphismen sind .

Zu den einzelnen Beweisen:

1. klar

2.

Für $X = Q, S, P, L, L_f$ klar .

Sei $\alpha \in \underline{P} \xrightarrow{P} K$, d.h. es gibt eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ eine Indexmenge J_i , außerdem einen Filter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}I$ und für $i \in I$ je einen Filter $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{P}J_i$, so daß

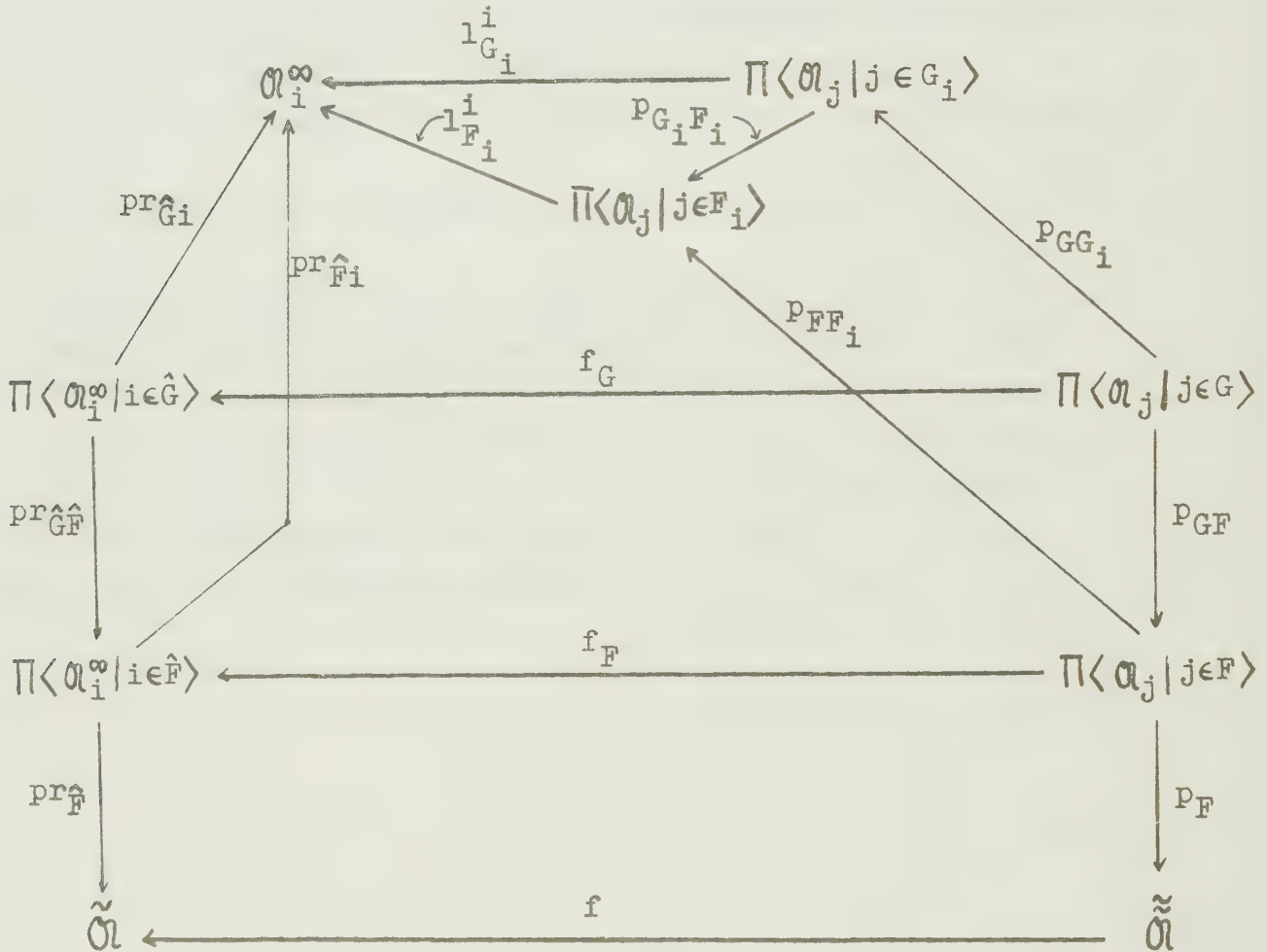
$\alpha \cong \prod \langle \alpha_i^\infty \mid i \in I \rangle / \mathcal{F}$ und für $i \in I$ $\alpha_i^\infty = \prod \langle \alpha_j \mid j \in J_i \rangle / \mathcal{F}_i$,

wobei für $j \in J := \bigcup \langle J_i \mid i \in I \rangle$ $\alpha_j \in K$. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}J$ folgendes Mengensystem : $G \in \mathcal{G} \leftrightarrow \{i \in I \mid G \cap J_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F}$.

Sei $G \in \mathcal{G}$, $\hat{G} := \{i \mid G \cap J_i \in \mathcal{F}_i\}$ - also $\hat{G} \in \mathcal{F}$. Für $i \in \hat{G}$

sei $G_i := G \cap J_i$, also $G_i \in \mathcal{F}_i$, $\text{pr}_{\hat{G}i} : \prod \langle \alpha_i^\infty \mid i \in \hat{G} \rangle \longrightarrow \alpha_i^\infty$

und $p_{GG_i} : \prod \langle \alpha_j | j \in G \rangle \longrightarrow \prod \langle \alpha_j | j \in G_i \rangle$ seien die Projektionen des Produktes und $l_{G_i}^i : \prod \langle \alpha_j | j \in G_i \rangle \longrightarrow \alpha_i^\infty$ sei der kanonische Morphismus des gerichteten Limes. Es gibt genau einen Morphismus $f_G : \prod \langle \alpha_j | j \in G \rangle \longrightarrow \prod \langle \alpha_i^\infty | i \in \hat{G} \rangle$, für den für $i \in \hat{G}$ gilt $l_{G_i}^i \cdot p_{GG_i} = \text{pr}_{\hat{G}i} \cdot f_G$, da $\langle \text{pr}_{\hat{G}i} | i \in \hat{G} \rangle$ die Projektionen eines Produktes sind.



Wenn $F \in \mathcal{G}$, $F \subseteq G$, sei $\hat{F} := \{i \mid F \cap J_i \in \mathcal{F}_i\}$ - also $\hat{F} \in \mathcal{F}$ und für $i \in \hat{F}$ $F_i := F \cap J_i$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_F \cdot p_{GF} &= \text{pr}_{\hat{G}\hat{F}} \cdot f_G, \\
 \text{da für alle } i \in \hat{F} \\
 \text{pr}_{\hat{F}i} \cdot f_F \cdot p_{GF} &= l_{F_i}^i \cdot p_{FF_i} \cdot p_{GF} = l_{F_i}^i \cdot p_{G_iF_i} \cdot p_{GG_i} \\
 &= l_{G_i}^i \cdot p_{GG_i} = \text{pr}_{\hat{G}i} \cdot f_G = \text{pr}_{\hat{F}i} \cdot \text{pr}_{\hat{G}\hat{F}} \cdot f_G.
 \end{aligned}$$

Seien $\langle p_G : \prod \langle \alpha_j | j \in G \rangle \longrightarrow \tilde{\alpha} \mid G \in \mathcal{G} \rangle$ und

$\langle \text{pr}_{\hat{G}} : \prod \langle a_i^\infty | i \in G \rangle \longrightarrow \tilde{a} \mid G \in \mathcal{G} \rangle$ gerichtete Limiten. Wegen (1) gibt es ~~genau~~ einen Morphismus $f : \tilde{a} \longrightarrow \tilde{a}$, so daß für $G \in \mathcal{G}$ $f \cdot p_G = f_G \cdot \text{pr}_{\hat{G}}$. Wegen Lemma A.17 ist $\tilde{a} = a$.

Es bleibt zu zeigen, daß f ein Isomorphismus ist. Wir zeigen, daß die vorliegende Konstruktion in der Kategorie Ens auf einen Isomorphismus führt. Da in Ens^H Limiten und Colimiten komponentenweise in Ens konstruiert werden und Isomorphismen "komponentenweise Isomorphismen" sind, gilt dasselbe dann für die Kategorie Ens^H. Da schließlich $U : K(\Omega) \longrightarrow \text{Ens}^H$ gerichtete Limiten erhält und Isomorphismen reflektiert, gilt dasselbe auch für K(Ω). *)

Wir benötigen für das Folgende einen Hilfssatz, dessen Gültigkeit offensichtlich ist:

Hilfssatz: Sei $\prod \langle A_i | i \in I \rangle / \mathcal{F}$ ein filtriertes Produkt und $G \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_G := \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq G\}$. $\mathcal{F}_G$ ist ein Filter und $\prod \langle A_i | i \in I \rangle / \mathcal{F} \cong \prod \langle A_i | i \in G \rangle / \mathcal{F}_G$.

Seien $I, J_i, J, \mathcal{F}, \mathcal{F}_i$ und $\mathcal{G}$ wie oben definiert. Für $j \in J$ sei jetzt allerdings A_j eine Menge.

Sei $\tilde{E} := \{j \mid A_j \neq \emptyset\} \subseteq J$.

1. Fall: $\tilde{E} \in \mathcal{G}$

Sei $\hat{E} := \{i \in I \mid \tilde{E} \cap J_i \in \mathcal{F}_i\}$, nach Voraussetzung ist also $\hat{E} \in \mathcal{F}$. Sei $E := \bigsqcup \langle J_i \mid i \in \hat{E} \rangle \subseteq E$. Es ist also $\hat{E} = \hat{\hat{E}}$, und somit $E \in \mathcal{G}$. Nach dem Hilfssatz ist für $\mathcal{G}_E := \{F \in \mathcal{G} \mid F \subseteq E\}$ $\prod \langle A_j \mid j \in J \rangle / \mathcal{G} = \prod \langle A_j \mid j \in E \rangle / \mathcal{G}_E$. Für $i \in \hat{E}$ ist $A_i^\infty \cong \prod \langle A_j \mid j \in E_i \rangle / \mathcal{F}_{i, E_i}$ und somit ist $A = \prod \langle A_i^\infty \mid i \in \hat{E} \rangle / \mathcal{F}_{\hat{E}}$. In all diesen Konstruktionen kommen also nur nicht-leere Mengen vor.

2. Fall: $\tilde{E} \notin \mathcal{G}$

Es ist dann $\prod \langle A_j \mid j \in J \rangle / \mathcal{G} = \emptyset$, da jedes Teilprodukt die leere Menge als Faktor enthält. Aus demselben Grund ist

*) Wir wissen nicht, ob im Allgmeinfall das konstruierte f ein Isomorphismus ist.

$\{i \in I \mid A_i^\infty \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ und daher $\prod \langle A_i^\infty \mid i \in I \rangle / \mathcal{F} = \emptyset$, womit bewiesen ist, daß $f : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ ein Isomorphismus ist.

Wir können des weiteren davon ausgehen, daß für alle $j \in J$ $A_j \neq \emptyset$.

(2) f_J ist ein Epimorphismus

Es ist nämlich $\prod \langle A_j \mid j \in J \rangle \cong \prod \langle \prod Q_j \mid j \in J_i \rangle \mid i \in I \rangle$ und da die Projektionen $p_{G_i F_i}$ epimorph sind, sind auch $l_{G_i}^i$ epimorph (vgl. 4.7), speziell also $l_{J_i}^i$ für $i \in I$. Als Produkt von Epimorphismen ist also f_J ein Epimorphismus.

Da die Projektion $pr_J^\wedge$ ein Epimorphismus ist und $f \cdot p_J = pr_J^\wedge \cdot f_J$, folgt hieraus sofort

(3) f ist ein Epimorphismus

Seien $x = \langle \langle x_j \mid j \in J_i \rangle \mid i \in I \rangle$ und $y = \langle \langle y_j \mid j \in J_i \rangle \mid i \in I \rangle$ Elemente von $\prod \langle A_j \mid j \in J \rangle$. Wir zeigen, daß

$$(4) \quad pr_J^\wedge \cdot f_J(x) = pr_J^\wedge \cdot f_J(y) \rightarrow p_J(x) = p_J(y),$$

woraus unmittelbar folgt, daß f injektiv ist.

Es ist für $z \in \prod \langle A_j \mid j \in J \rangle$

$$pr_J^\wedge \cdot f_J(\langle \langle z_j \mid j \in J_i \rangle \mid i \in I \rangle) = pr_J(\langle l_{J_i}^i(\langle z_j \mid j \in J_i \rangle) \mid i \in I \rangle).$$

Sei $pr_J^\wedge \cdot f_J(x) = pr_J^\wedge \cdot f_J(y)$. Also gilt

$$pr_J^\wedge(\langle l_{J_i}^i(\langle x_j \mid j \in J_i \rangle) \mid i \in I \rangle) = pr_J^\wedge(\langle l_{J_i}^i(\langle y_j \mid j \in J_i \rangle) \mid i \in I \rangle)$$

und somit $\{i \in I \mid \langle l_{J_i}^i(\langle x_j \mid j \in J_i \rangle) = l_{J_i}^i(\langle y_j \mid j \in J_i \rangle)\} \in \mathcal{F}$.

Anders ausgedrückt: $\{i \in I \mid \{j \in J_i \mid x_j = y_j\} \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F}$.

Sei $G := \{j \in J \mid x_j = y_j\}$, dann ist also $\{i \in I \mid G \cap J_i \in \mathcal{F}_i\} \in \mathcal{F}$

und nach Definition $G \in \mathcal{G}$. Also ist $\{j \in J \mid x_j = y_j\} \in \mathcal{G}$ und

somit $p_J(x) = p_J(y)$.

Wegen (3) und (4) ist f ein Isomorphismus und daher ist

$$\mathcal{A} \cong \prod \langle \mathcal{A}_j \mid j \in J \rangle / \mathcal{G} \quad \text{und also} \quad \mathcal{A} \in \underline{P}_K.$$

Da $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter ist, wenn alle $\mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}$ Ultrafilter sind, ist gleichzeitig $\underline{P}_K \in \underline{P}_K$ gezeigt.

Außerdem sieht man leicht, daß die Familie $\langle \mathcal{A}_j | j \in J \rangle$ regulär ist, wenn alle Familien $\langle \mathcal{A}_j | j \in J_i \rangle$ und die Familie $\langle \mathcal{A}_i^\infty | i \in I \rangle$ regulär sind. Damit folgt $\prod \prod K \subseteq \prod K$ und $\prod \prod K \subseteq \prod K$.

3. ist trivial

4.

Sei $\mathcal{A} \in \prod K$, $\mathcal{A} \cong \prod \langle \mathcal{A}_i | i \in I \rangle / \mathcal{F}$. Für $h \in H$ sei $J_h := \{i \in I \mid \mathcal{A}_i^h = \emptyset \leftrightarrow A^h = \emptyset\}$. Für $h \in H$ mit $A^h \neq \emptyset$, ist $J_h \in \mathcal{F}$. Sei J der Durchschnitt der J_h , für die $A^h \neq \emptyset$ ist; da H endlich ist, ist $J \in \mathcal{F}$. Für alle $i \in J$ gilt also $A^h \neq \emptyset \rightarrow \mathcal{A}_i^h \neq \emptyset$. Sei für $i \in J$ $\hat{\mathcal{A}}_i$ die Subalgebra von $\mathcal{A}_i$, für die $A^h = \emptyset \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_i^h = \emptyset$ und $A^h \neq \emptyset \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_i^h = \mathcal{A}_i^h$ (vgl. Lemma 1.32)

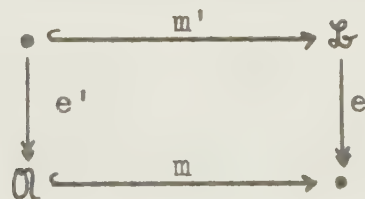
Offensichtlich ist $\prod \langle \mathcal{A}_i | i \in I \rangle / \mathcal{F} \cong \prod \langle \hat{\mathcal{A}}_i | i \in J \rangle / \mathcal{F}_J$.

5. wegen 3.23

6. nach Definition

7.

Sei $\mathcal{A} \in S \ Q \ K$. Betrachte das Pullback-Diagramm mit $\mathcal{L} \in K$



Pullbacks von Monomorphismen sind monomorph. $U(e)$ ist eine Retraktion, also auch $U(e')$, da U Pullbacks erhält. Damit ist e' ein regulärer Epimorphismus und also $\mathcal{A} \in Q \ S \ K$.

8.

Sei $\mathcal{A} \in P \ S \ K$, $\mathcal{A} \cong \prod \langle \mathcal{A}_i | i \in I \rangle$, $m_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{L}_i$ seien Monomorphismen und $\mathcal{L}_i \in K$. Nach der Vorbemerkung ist

$\prod m_i : \prod \mathcal{A}_i \longrightarrow \prod \mathcal{L}_i$ ein Monomorphismus, also $\mathcal{A} \in S \ P \ K$.

Sei $\mathcal{A} \in \prod S \ K$, $\mathcal{A} \cong \prod \langle \mathcal{A}_i | i \in I \rangle / \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}I$ ein Filter, $m_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{L}_i$ seien Monomorphismen.

$$\begin{array}{ccccc}
 \prod \langle \alpha_i | i \in I \rangle & \xrightarrow{\text{pr}_{FG}} & \prod \langle \alpha_i | i \in G \rangle & \xrightarrow{\text{pr}_G} & \prod \langle \alpha_i | i \in I \rangle / \mathcal{F} \\
 \downarrow \prod \langle m_i | i \in F \rangle & & \downarrow \prod \langle m_i | i \in G \rangle & & \downarrow m \\
 \prod \langle \mathcal{L}_i | i \in F \rangle & \xrightarrow{\overline{\text{pr}}_{FG}} & \prod \langle \mathcal{L}_i | i \in G \rangle & \xrightarrow{\overline{\text{pr}}_G} & \prod \langle \mathcal{L}_i | i \in I \rangle / \mathcal{F}
 \end{array}$$

Da gerichtete Limiten von Monomorphismen monomorph sind, ist m monomorph, also $\mathcal{A} \in S \xrightarrow{P} K$. Gleichfalls folgt hieraus $\xrightarrow{P} S K \subseteq S \xrightarrow{P} K$, wenn man $\mathcal{F}$ als Ultrafilter annimmt.

Sei $\mathcal{A} \in \xrightarrow{P} S \xrightarrow{P} K$; $\mathcal{A} \cong \prod \langle \alpha_i^* | i \in I \rangle / \mathcal{F}$ und für $i \in I$ sei J_i eine Indexmenge, $\alpha_i^* \subseteq \prod \langle \alpha_j | j \in J_i \rangle / \mathcal{F}_i$, wobei die vorkommenden Familien regulär seien. Für $j \in J_i$ sei $\mathcal{L}_j$ die Subalgebra von α_j , für die $B_j^h = \emptyset$ falls $A^h = \emptyset$, $B_j^h = A_j^h$ falls $A^h \neq \emptyset$. Es ist also für $i \in I$ $\alpha_i^* \subseteq \prod \langle \mathcal{L}_j | j \in J_i \rangle / \mathcal{F}_i$ und in dieser Einbettung ist $(A_i^*)^h = \emptyset$ nur dann, wenn $(\prod \langle B_j | j \in J_i \rangle / \mathcal{F}_i)^h = \emptyset$.

Die Konstruktion im Beweis von $\xrightarrow{P} S K \subseteq S \xrightarrow{P} K$ kann somit herangezogen werden, um $\mathcal{A}$ als Subalgebra eines regulär filtrierten Produktes der Algebren $\prod \langle \mathcal{L}_j | j \in J_i \rangle / \mathcal{F}_i$ zu konstruieren. Es ist also $\mathcal{A} \in S \xrightarrow{P} \xrightarrow{P} S K$ und wegen $\xrightarrow{P} \xrightarrow{P} \subseteq \xrightarrow{P}$, $\mathcal{A} \in S \xrightarrow{P} S K$.

9.

$P Q K \subseteq Q P K$, $\xrightarrow{P} Q K \subseteq Q \xrightarrow{P} K$ und $\xrightarrow{P} Q K \subseteq Q \xrightarrow{P} K$ folgen wie unter 8. gezeigt, da nach der Vorbemerkung Produkte und gerichtete Limiten in $K(\underline{Q})$ reguläre Epimorphismen erhalten.

Wenn $\langle \mathcal{L}_i | i \in I \rangle$ eine reguläre Familie ist und für $i \in I$ $f_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \alpha_i$ reguläre Epimorphismen sind, ist auch $\langle \alpha_i | i \in I \rangle$ eine reguläre Familie. Somit gilt $\xrightarrow{P} Q K \subseteq Q \xrightarrow{P} K$ und $\xrightarrow{P} Q K \subseteq Q \xrightarrow{P} K$.

10.

Sei $\mathcal{L} \in S \xrightarrow{\text{Lim}} K$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \alpha_i & \xrightarrow{f_{ij}} & \alpha_j & \xrightarrow{f_j} & \alpha \\
 \uparrow m_i & & \uparrow m_j & & \uparrow m \\
 \mathcal{L}_i & \xrightarrow{g_{ij}} & \mathcal{L}_j & \xrightarrow{g_j} & \mathcal{L}
 \end{array}$$

Sei jeweils $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{A}_i$ das Urbild von $\mathcal{L}$ unter f_i und seien g_{ij} und g_i jeweils die Einschränkungen von f_{ij} bzw. f_i . Die Quadrate in dem Diagramm auf Seite 81 unten sind Pullback-Quadrate. Wegen Theorem 3.4 und da U Pullbacks erhält und gerichtete Limiten erhält und reflektiert, ist $\langle g_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L} \rangle$ ein gerichteter Limes, also $\mathcal{L} \in \underline{\text{Lim}} S K$.

Falls $\langle f_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A} \rangle$ ein regulär gerichteter Limes ist, ist auch $\langle g_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L} \rangle$ ein regulär gerichteter Limes.

11. trivial

12.

Wir beweisen hier, daß $P L_f K \subseteq L_f P K$. Die Modifikationen für den Beweis von $P L K \subseteq L P K$ sind offensichtlich.

Sei $\mathcal{A} \in P L_f K$, $\mathcal{A} \cong \prod \langle \mathcal{A}_i \mid i \in I \rangle$ und für $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ finitär lokal in K . Für $b \in \text{Univ}(\Omega, A)$ sei $\text{Ers}_i(b) \in \text{Univ}(\Omega, A_i)$ die Formel, in der für alle $h \in H$ jedes $a \in A^h$ durch $\text{pr}_i^h(a)$ ersetzt wird; $\text{Ers}_i(\mathcal{A}) := \{ \text{Ers}_i(b) \mid b \in \mathcal{A} \}$. Für $b \in \text{Diag}_=(\mathcal{A})$ ist für alle $i \in I$ $\text{Ers}_i(b) \in \text{Diag}_=(\mathcal{A}_i)$, für $b \in \text{Diag}_+(\mathcal{A})$ gibt es ein $i \in I$, so daß $\text{Ers}_i(b) \in \text{Diag}_+(\mathcal{A}_i)$.

Sei $\mathcal{A} \subseteq \text{Diag}(\mathcal{A})$ endlich. Da für $\mathcal{A} \subseteq \hat{\mathcal{A}} \subseteq \text{Diag}(\mathcal{A})$, $\hat{\mathcal{A}}$ endlich, aus der lokalen Erfüllbarkeit von $\hat{\mathcal{A}}$ in K die lokale Erfüllbarkeit von $\mathcal{A}$ in K folgt, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß alle Variablen von $\mathcal{A}$, die in einer Ungleichung vorkommen, auch in mindestens einer Gleichung vorkommen. Für $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i := \{ \text{Ers}_i(b) \mid b \in \mathcal{A} \wedge b \in \text{Diag}(\mathcal{A}_i) \}$; $\mathcal{A}_i$ enthält also alle $\text{Ers}_i(b)$, falls $b \in \mathcal{A}$ eine Gleichung ist, und für jede Ungleichung $b \in \mathcal{A}$ gibt es ein $i \in I$ mit $\text{Ers}_i(b) \in \mathcal{A}_i$. Sei X die H-Menge der Variablen von $\mathcal{A}$ und X_i die H-Menge der Variablen von $\mathcal{A}_i$, es ist also $X \subseteq \prod X_i$. Für $i \in I$ sei

$$f_i : X_i \longrightarrow B_i, \quad \mathcal{L}_i \in K \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_i \models_{f_i} \mathcal{A}_i.$$

Sei $f := \prod f_i : \prod X_i \longrightarrow \prod B_i$, es gilt $\prod \mathcal{L}_i \models_f \mathcal{A}$ und daher mit $\hat{f} := f \upharpoonright X$ $\prod \mathcal{L}_i \models_{\hat{f}} \mathcal{A}$. Also ist $\mathcal{A} \in L_f P K$.

Literaturliste

- BH75 B.Banaschewski und H.Herrlich
Subcategories defined by implications
McMaster University 1975
- BL70 G.Birkhoff und J.D.Lipson
Heterogeneous Algebras
Journal of combinatorial theory 8, 115-133 (1970)
- C65 P.M. Cohn
Universal Algebra
Harper & Row, New York 1965
- GU71 P.Gabriel und F.Ulmer
Lokal präsentierbare Kategorien
Lecture Notes in Mathematics 221, Springer Verlag 1971
- G68 G. Grätzer
Universal Algebra
D. van Nostrand Company INC, 1968
- H74 H.Herrlich
Regular categories and regular functors
Can. J. Math., Vol. XXVI, No. 3, 1974, pp. 709-720
- HS73 H.Herrlich und G.E.Strecker
Category Theory
Allyn and Bacon Inc, Boston, 1973
- H63 P.J.Higgins
Algebras with a scheme of operators
Math. Nachrichten 27 (1963), pp. 115-132
- K73 R.Kühl
Über topologische heterogene Algebren
Arbeitspapier, unveröffentlicht, 1973
- ML72 S.MacLane
Kategorien
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1972
- M59 A.I.Mal'cev
Model correspondences
in The metamathematics of algebraic systems, collected
papers 1936 - 1967
North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1971
- M73 A.I.Mal'cev
Algebraic Systems
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1973
- M69 E.Manes
A triple theoretic construction of compact algebras
in Seminar on Triples and Categorical Homology Theory
Lecture Notes in Mathematics 80,
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1969
- M72 G.Matthiessen
Heterogene Algebren
Universität Bremen, unveröffentlichte Ausarbeitung eines
Seminarvortrages 1972

- P71 M.Pfender
Kongruenzen, Konstruktionen von Limiten und Cokernen
und algebraische Kategorien
Dissertation, TU Berlin 1971
- SM68 J. Schulte-Mönting
Kategorien von Algebren mit einer Familie von Grundobjekten
Diplomarbeit, Math. Inst. d. Univ. Freiburg/Br. , 1968
- S65 F.M.Sioson
Decomposition of generalized Algebras I,II
Proceedings of the Japan Academy t. 41,(1965), pp 923-932
- S66 F.M.Sioson
On generalized Algebras
Portugaliae Mathematica, Vol25 - Fasc 2 - 1966
- T73 W.Taylor
Characterizing Mal'cev conditions
algebra universalis, Vol 3, fasc. 3, 1973
- W75 G.C. Wraith
Lectures on Elementary Topoi
in Model Theory and Topoi
Lecture Notes in Mathematics 445,
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1975

Index

$\text{Abb}(A, B)$, 2

Ω -abgeschlossen, 11

abzählbar, 4

adjungierte Situation; adjoint situation (HS74, 27.1)

Algebra, 8

Ω -Algebra, 7

algebraische Funktion, 10

algebraischer Hüllenoperator, 4

algebraisches Hüllensystem, 4

algebroidal, 64

$\text{AlgFu}(\mathcal{A})$, 10

atomare Formel, 19

Belegung (der Variablen), 18

Bild (einer H-Menge unter einer H-Abbildung) :

Sei $f \in \text{Abb}(A, B)$ und $\hat{A} \subseteq A$. Das Bild von $\hat{A}$ unter f ist die H-Menge mit den Phyla $\{z \mid \exists x \in \hat{A}^h \ f^h(x) = z\}$ für $h \in H$.

card (für H-Mengen), 5

card (für Mengen), Kardinalzahl der Menge

Coegalisateur; Differenzcokern (ML72, S.68), coequalizer (HS74, 16.2)

cofinal:

Sei $\langle I, \leq \rangle$ eine partiell geordnete Menge und $J \subseteq I$. J ist cofinal in I , wenn $\forall x \in I \ \exists y \in J \ x \leq y$.

Wenn $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \mid i \in I \rangle$ ein gerichteter Limes ist und $J \subseteq I$ cofinal, dann ist $\langle f_i : A_i \longrightarrow A \mid i \in J \rangle$ ein gerichteter Limes.

Colimes; (ML72, S.70), colimit (HS74, 20.2)

$\text{Con}(\mathcal{A})$, 8

Coprodukt; (ML72, S.65), coproduct (HS74, 18.3 und 18.6)

manchmal auch im Sinne von "Coprodukt-Objekt" gebraucht.

covollständig; cocomplete (HS74, 23.1)

Diagramm, 47

$\text{Diag}_=(\mathcal{A})$, $\text{Diag}_+(\mathcal{A})$, 47

Einschränkung, 7

Elementarer Topos ; siehe z.B. W75 - elementary topos

elementare Translation, 10

endlich, 4, 26

endliche-Durchschnitts-Eigenschaft:

Ein Mengensystem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}I$ hat die e.D.E. genau dann, wenn für alle endlichen Familien mit Elementen aus $\mathcal{S}$ der Durchschnitt nicht leer ist. Mengensysteme mit der e.D.E. lassen sich zu einem Ultrafilter erweitern.

$\text{Ens}, \text{Ens}^H, 1$

$\underline{\text{Ens}}^H, 2$

$(\underline{\text{Ens}} \downarrow H), 3$

Epimorphismus; (ML72, S.20), (HS74, 6.9)

Epi-Senke; epi-sink (HS74, 19.1), dualer Begriff zu Mono-Quelle
 $\text{Equ}(A), 2$

erfüllbar, 47

erhalten (von Eigenschaften durch Funktoren); preserve (HS74, 12.1 und 24.1)

erschaffen (von Limiten und Colimiten durch Funktoren) ;
erzeugen (ML72, S.116)

erschaffen (von Faktorisierungen durch Funktoren) , 61

Erweiterung, 7

G-erzeugender Morphismus : $g : B \longrightarrow GA$ G-erzeugt A , falls
g die Bedingung a) von A.3.1 erfüllt,

Erzeugendensystem: Eine Teilmenge $B \subseteq A$ einer Algebra

heißt E. von $\mathcal{A}$, falls für alle $C \in \text{Sub}(\mathcal{A})$ $C \supseteq B \rightarrow C = A$

extrem-epi-coklein, 28 ; extremally co-(well-powered) (HS74, 17.9)

extrem G-erzeugender Morphismus, 61

fast trivial, 4

filtriertes Produkt, 46

U-final, 28

finitär (universell axiomatische Klasse, Gleichungsklasse,
Quasigleichungsklasse) , 20

finitär erfüllbar, 47

finitär G-erzeugt, 65

finitärer Funktor, 64

finitär lokal, 47

finitäres Objekt, 64

finitär G-präsentiert, 65

Formel, 19

freie Algebra, 17 ; eine Ω -Algebra $\mathcal{A}$ heißt frei über einer H-Menge X , wenn eine H-Abbildung $\eta_X : X \longrightarrow U(\mathcal{A})$ existiert und für jede Algebra $\mathcal{L}$ und jede H-Abbildung $g : X \longrightarrow U(\mathcal{L})$ gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{g}_X : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$, so daß $\bar{g}_X \cdot \eta_X = g$.

gerichtete Familie, 63

gerichteter Limes, 63

gerichtete Menge, 63

gerichtete Vereinigung, 63

Gleichung, 18

$Gl(\Omega, X)$, 18

Gleichungsklasse, gleichungsdefiniert, 20

Grundoperation, 8

H-Abbildung, 2

H-abzählbar, 4

H-Äquivalenz, 2

H-endlich, 4

H-Menge, 1

$\text{hom}(FX, \cdot) : \text{Hom-Funktor } \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$, $\text{hom}(FX, A) = \{f : FX \longrightarrow A\}$
für $g : A \longrightarrow B$ ist

$$\text{hom}(FX, g) : \begin{cases} \text{hom}(FX, A) \longrightarrow \text{hom}(FX, B) \\ f \longmapsto g \cdot f \end{cases}$$

$\text{hom}(X, G\cdot) : \text{Sei } G : \underline{K} \longrightarrow \underline{L} \text{ ein Funktor. So ist für alle } X \in \underline{L}$
 $\text{hom}(X, G\cdot) : \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$ ein Funktor.

$\text{hom}(X, GA) = \{f : X \longrightarrow GA\}$. Für $g : A \longrightarrow B$ ist

$$\text{hom}(X, Gg) : \begin{cases} \text{hom}(X, GA) \longrightarrow \text{hom}(X, GB) \\ f \longmapsto Gg \cdot f \end{cases}$$

$\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$, 8

Homogenisierung, 12

Homomorphismus, 8

homomorphe Fortsetzung : (vgl. freie Algebra) der eindeutige Homomorphismus $\bar{g}_X$, der $g = \bar{g}_X \cdot \eta_X$ erfüllt, heißt h.F. von g .

H-tupel, 1

Hüllenoperator, 14

Hüllensystem, 14

H-unendlich, 4

Hutoperator, 17

Imp , Imp_f , 55

in , 24

Induktionsprinzip, 15

U-initial, 28

injektiv, 4

$K(\Omega)$, 7

$\underline{K}(\underline{Q})$, 24

Kardinalzahl (von H-Mengen) , 5

Kern, ker f , 2

U-Kernpaar: Sei $U : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Funktor. Ein Paar $\begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xleftarrow{s} \end{array}$

in $\underline{K}$ heißt U-Kernpaar, falls es einen Morphismus f

in $\underline{L}$ gibt, so daß ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{Ur} & \\ U_s \downarrow & & \downarrow f \\ & \xrightarrow{f} & \end{array}$$

ist.

Kommakategorie, 3,29;vgl (ML72, S.48f)

Kongruenz, 8

Konklusion, 20

Korr(A,B) , 2

L, L_f , 48

$l(w)$, 16

Limes; (ML72, S.72) , limit (HS74, 20.2)

(gerichtete Limiten sind Colimiten !!!)

$\underline{\text{Lim}}$, $\underline{\text{Lim}}$, 48

links-adjungierter (Funktor); (ML72, S.40), left adjoint of
a functor (HS74, 27.1)

lokal, 47

lokal coklein; (ML72, S.138), co-(well-powered), (HS74, 6.27)

lokal fortsetzbar, 42

lokal klein; (ML72, S.138), well-powered (HS74, 6.27)

Łoś, Theorem von , 49

monadisch , 31 ; (ML72, S.153)

Mono-Quelle, 60

Monomorphismus; (ML72, S.20), monomorphism (HS74, 6.9)

natürliche Äquivalenz; (ML72, S.16), natural isomorphism (HS74,13.1)

natürliche Senke; natural sink (HS74, 20.1)

$\text{Op}(\mathcal{A})$, 8

Operation, 7

Operator, 7, 47

Operatorenbereich (heterogener) , 7

Operatorenbereich (homogener) ; operator domain (C65, p.48)

$\mathbb{F}, \underline{\mathbb{P}}, \underline{\mathbb{P}}, \underline{\mathbb{P}}, \underline{\mathbb{P}}, \underline{\mathbb{P}}$, 47

$\mathcal{Q}(A)$, 3

$\mathcal{Q}_{\text{fin}}(A) := \{B \subseteq A \mid B \text{ ist endlich}\}$

Phylum, Phylumsymbol , 1

$\text{Pol}(\mathcal{A}, X)$, 9

$\text{Pol}(\Omega, X)$, $\text{Pol}(\Omega, X)$, 16

$\text{Pol}^c(\Omega, X)$, 17

Polynom, 9

Polynomsymbol, 16

Potenzmenge, 3

pr , 9

$\underline{\text{pr}}$, 9

Prämisse, 20

Präsentation , 63

Produkt, Projektion, 9

Pullback, Pullback-Quadrat; p., p.-square (HS74, 21.1)

$\mathcal{Q}$, 47

$\mathcal{Q}\text{gl}(\Omega, X)$, 20

Quasigleichung, 20

Quasigleichungsklasse, quasigleichungs-definiert, 18

Quelle; source: eine Familie der Form $\langle f_i : A \longrightarrow A_i \mid i \in I \rangle$

Quotient, Quotientenalgebra, 9

$\hat{\Omega}$ -Redukt, 8

reflektieren; reflect (HS74, 12.1 und 24.1)

regulärer Epimorphismus; regular epimorphism (HS74, 16.13)

$e : A \longrightarrow B$ heißt regulärer Epimorphismus, wenn es

$\cdot \xrightarrow{r} \cdot$ gibt und $\langle e, B \rangle$ ist Coegalisateur von $\langle r, s \rangle$

(regulär- epi , mono)-Kategorie:

Eine Kategorie $\underline{K}$ ist eine (r-e,m)-K. , falls jeder Morphismus f faktorisiert ist, $f = m \cdot e$, wobei e ein regulärer Epimorphismus ist und m ein Monomorphismus.

(regulär-epi)-reflektive Unterkategorie :

Eine Unterkategorie $\underline{L} \subseteq \underline{K}$ ist eine (r-e)-r. Unterkategorie, wenn für jedes Objekt $A \in \underline{K}$ ein regulärer Epimorphismus $r_A : A \longrightarrow RA$ existiert mit $RA \in \underline{L}$, so daß für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow B \in \underline{L}$ es genau einen Morphismus $g : RA \longrightarrow B$ gibt der

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r_A} & RA \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & B \end{array}$$

kommutativ macht. $\langle r_A, RA \rangle$ heißt Reflexion in $\underline{L}$.

regulär G-erzeugender Morphismus, 61

reguläre Faktorisierung, 61

regulär filtrierte Produkt, 46

regulärer Funktor, 61

regulär gerichtete Familie, 43

regulär gerichteter Limes, 43

reguläre Kardinalzahl:

eine unendliche Kardinalzahl λ heißt regulär, wenn für jede Mengenfamilie $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ mit $\text{card } I < \lambda$ und $\text{card } A_i < \lambda$ für alle $i \in I$ folgt, daß $\text{card}(\bigcup \langle A_i \mid i \in I \rangle) < \lambda$.

reguläre Kategorie, 61

reguläres Ultraprodukt, 46

Relation, 7

Retraktion; (ML72, S.20), retraction (HS74, 5.7)

Schnitt(dualer Begriff zu Retraktion); (ML72, S.20), section (HS74, 5.2)

stark algebroidal, 64

stark finitär G-erzeugt, 65

stark finitärer Funktor, 65

stark finitäres Objekt, 64

stark finitär G-präsentiert, 65

Sub($\mathcal{A}$), 8

Subalgebra, 9

subalgebraisch, 8

Subobjekt (in Kategorien):

ein Paar $\langle A, m \rangle$ ist ein Subobjekt von B , wenn $m : A \longrightarrow B$ ein Monomorphismus ist; häufig wird auch A als Subobjekt bezeichnet.

Translation, 10

transportabel, 28

treu (Funktor) ; (ML72, S.15), faithful (HS, 12.5)

$U(\mathcal{A})$, 7, 24

Ultraprodukt, 46

unendlich, 4

$\text{Univ}(\Omega, X)$, 19

universell axiomatisch, 20

Urbild: Sei $f : A \longrightarrow B$ eine H-Abbildung und $\hat{B} \subseteq B$.

$f^{-1}(B) := \langle \{x \mid f^h(x) \in \hat{B}^h\} \mid h \in H \rangle$ ist das Urbild von B unter f .

Var, Var_f , 58

Variablenmenge, 9 (ist im allgemeinen eine H-Menge)

ω -verträglich, 8

vollständig (Kategorie) ; (ML72, S. 113), complete (HS74, 23.1)

$W(H)$, 5

$\mathcal{M}(X)$, 16

$w(\omega), w'(\omega)$, 7, 10, 17

Wort(X), 16

